

Recurso contra a reprovação do  
Conselho do Departamento de  
Matemática Aplicada e Estatística  
do relatório de atividades referente  
ao período de estágio de  
experimentação em regime RDIDP  
da docente Cynthia de Oliveira  
Lage Ferreira

O presente documento tem como objetivo recorrer da decisão do Conselho do Departamento de Matemática Aplicada e Estatística (SME) referente ao relatório de atividades desenvolvidas por esta docente no período entre 05 de abril de 2015 e 04 de abril de 2017.

Tal decisão foi baseada no parecer de 5 docentes, sendo 2 pertencentes ao Departamento SME, 2 docentes de outras unidades da USP e 1 docente externo. Vale ressaltar que todos os pareceristas foram unânimes em considerar o desempenho desta docente satisfatório em todos os quesitos, exceto em pesquisa, que foi considerado necessitar maior atenção por parte desta docente. Além disso, um dos pareceristas aprovou o relatório enviado por esta docente e outro, sem

aprovar ou reprovar, indicou possíveis metas a serem cumpridas.

Abaixo, gostaria de apresentar dados mais concretos com relação a atividade de extensão que venho desenvolvendo para que possa ser melhor avaliada quanto à sua importância e relevância para os interesses do Departamento SME e do ICMC. Além disso, gostaria de esclarecer algumas questões levantadas pelos colegas pareceristas, propor sugestões de atividades para aumentar a colaboração desta docente em atividades ordinárias e complementares que contemplem as diretrizes do Departamento SME e, também, destacar novamente os trabalhos em pesquisa que venho desenvolvendo, para que os colegas deste Conselho tenham outra oportunidade de avaliar os trabalhos desta docente.

## **Sobre o Projeto: A matemática e o jovem: despertando múltiplas habilidades e talentos**

### **Resumo**

O Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação (ICMC) oferece cinco cursos de graduação próprios e dois cursos interunidades, que são oferecidos em parceria com outros institutos da Universidade de São Paulo em São Carlos. Apesar da alta procura por alguns desses cursos, como Ciências de Computação e Engenharia de Computação, outros atraem pouco interesse dos estudantes, refletindo-se em uma baixa relação candidato-vaga, como os cursos de Estatística e Matemática Aplicada, apesar de também terem alta empregabilidade e boa remuneração. Além disso, entre os candidatos aprovados no vestibular, o número de alunos originários da cidade de São Carlos é bastante reduzido, comparado à

quantidade de vagas oferecidas. Sendo assim, é importante despertar vocações e descobrir talentos para o ensino universitário entre os jovens da região.

Este projeto tem a intenção de atuar na difusão científica do conhecimento a fim de despertar nos estudantes múltiplas habilidades e competências. Como consequência de nossas ações, esperamos que a médio prazo haja maior procura e interesse pelos cursos ofertados pelo ICMC por parte dos estudantes das redes pública e privada.

## **Finalidade e Objetivos**

Visamos desenvolver diversas atividades nas escolas das redes públicas e privada, como por exemplo *O Seminário de Coisas Legais Vai a Sua Escola* e *Pergunta, Jovem!*. Além disso, para guiar os temas dos seminários e nossas demais ações durante a execução deste projeto, elaboraremos questionários com o objetivo de obter as características e compreender os interesses dos alunos.

Como objeto de avaliação, será elaborado um instrumento de coleta de dados com o objetivo de avaliar o conhecimento de Matemática dos estudantes, o conhecimento deles em relação aos cursos do ICMC e suas expectativas com relação a serem aprovados no vestibular, bem como o grau de satisfação dos estudantes com relação às atividades desenvolvidas por este projeto.

## **Atividades Propostas**

O projeto está dividido em três atividades descritas a seguir. A atividade 2 contará com a colaboração dos professores do ICMC- USP Edna Maura Zuffi, Esther de Almeida Prado Rodrigues e Marina Andretta. Já a etapa 3 contará com a colaboração dos professores do ICMC- USP Juliana Cobre e Mario de Castro. Estão envolvidos no projeto, também, os bolsistas PUB e alunos de graduação Guilherme Carlos Monis Junior, graduando do curso de Matemática

e Gabriela Dall’Agnol, graduanda do curso de Estatística.

### ***Atividade 1 - O Seminário de Coisas Legais vai à sua escola***

O Seminário de Coisas Legais (<http://legal.icmc.usp.br/doku.php>) acontece no ICMC desde 2011. Com o objetivo de derrubar tabus e acabar com o medo que muitos alunos tem de matemática, os seminários se baseiam em exemplos modernos para dismistificar a ideia de que a ciência é assustadora. Seguindo esta mesma dinâmica, os monitores estudantes da USP apresentarão os seminários nas escolas. Objetivamos apresentar três seminários em cada escola selecionada, um por mês em média.

### ***Atividade 2 - Pergunta, jovem !***

O *Pergunta, jovem !* terá como objetivo esclarecer as dúvidas dos estudantes com relação à vida acadêmica, carreira científica e mercado de trabalho. Objetivamos realizar uma visita à cada escola e debater tais assuntos no formato de mesa redonda.

### ***Atividade 3 - Avaliação das atividades e características dos alunos***

Para análise das atividades desenvolvidas nas seções anteriores e obtenção de informações sobre os alunos, realizaremos as etapas dos itens abaixo:

- a) Elaboração de questionários para avaliação das atividades das seções anteriores,
- b) Elaboração de questionários para avaliação do conhecimento dos alunos sobre (i) fontes de informação, (ii) os assuntos que mais os interessam, (iii) os cursos do ICMC e (iv) as perspectivas sobre o mercado de trabalho,
- c) Aplicação dos questionários aos participantes das atividades das seções

anteriores,

- d) Análise estatística e
- e) Elaboração do relatório.

## Atividades Desenvolvidas em 2016

Em agosto de 2016 iniciamos as ações deste projeto na E.E. Dr Álvaro Guião. Fundada há mais de 100 anos, a escola Álvaro Guião, localizada na Av. São Carlos, há poucos metros do campus da USP, oferece os Ensinos Fundamental e Médio e possui alunos residentes em diversas regiões da cidade de São Carlos.

Como parte da atividade 3, esta docente, em parceria com os professores Juliana Cobre e Mario de Castro, além da bolsista Gabriela Dall’Agnol, elaborou o questionário abaixo com o objetivo de avaliar o conhecimento dos alunos do Ensino Médio com relação à USP, ENEM, mercado de trabalho e os cursos oferecidos pelo ICMC, em especial, os cursos de Estatística e Matemática Aplicada. Este questionário foi aplicado nos dias 12 e 13 de setembro para cerca de 480 alunos dos primeiro e segundo ano do Ensino Médio. Em anexo, apresento um relatório da análise descritiva dos dados obtidos. Neste dia, também, o bolsista Guilherme Carlos Monis Junior apresentou brevemente aos alunos uma série de temas que poderão ser explorados conforme interesse dos alunos como parte da atividade 1 descrita acima. Dois dos temas propostos despertaram bastante interesse: *A matemática nas animações* e *Matemática e música*.

Em uma segunda visita, realizada no dia 24 de outubro, como parte da atividade 1, o bolsista Guilherme Carlos Monis Junior apresentou o seminário *A matemática nas animações* para os mesmo 480 alunos que participaram da atividade anterior, divididos em 4 grupos de 120 alunos, aproximadamente. O seminário foi baseado no curso do site *Pixar in a box*, uma parceria da *Khan Academy* com os estúdios *Pixar*. Nesta ocasião, o bolsista Guilherme mostrou aos

alunos como conceitos simples de parábola, ponto médio e análise combinatória, por exemplo, podem ser utilizados na modelagem de ambientes, personagens e multidões em um filme de animação.

Diante do sucesso das atividades anteriores, fomos convidados pela professora titular de cargo da E.E. Dr Álvaro Guião, Maria Laura Trindade, a repetirmos a atividade do seminário *A matemática nas animações* com duas turmas do Ensino Fundamental. Assim, no dia 18 de novembro, realizamos uma terceira visita à escola para desenvolvermos tal atividade.

Além das atividades descritas acima, a docente, orienta desde setembro, como parte dos Programa de Pré-Iniciação Científica do ICMC, 4 alunos do segundo ano do Ensino Médio da E.E. Dr Álvaro Guião. Além de estudarem conteúdos do Ensino Médio, os alunos estão sendo orientados na leitura de diversos livros de divulgação científica, estão sendo iniciados nas linguagens Python e Latex, além de estarem participando de um curso de Introdução ao Cálculo, ministrado por esta docente especialmente para eles.

Devido ao sucesso na realização das atividades descritas acima, a professora Maria Laura Trindade, enviou no dia 21 de novembro, em e-mail de agradecimento ao Departamento de Matemática Aplicada e Estatística, o qual transcrevo a abaixo.

### **Questionário de Avaliação do Conhecimento dos Alunos**

#### Questionário

1. Qual o seu sexo ? ( ) masculino ( ) feminino
2. Em qual região da cidade você mora? (Pense em qual bairro dos citados abaixo fica mais próximo ao seu)  
( ) Região do Santa Felícia ( ) Região da Cidade Aracy ( ) Região da Vila Nery ( ) Região da Vila Prado ( ) Região Central ( ) Região

do Jockey Club A ( ) Região do Cidade Jardim ( )outra

3. Qual a sua idade?

( )14 ( )15 ( )16 ( )17 ( )mais do que 17

4. Você gosta de Matemática?

( ) sim ( ) não

5. O que você pretende fazer ao concluir o ensino médio?

( ) Trabalhar ( ) Curso técnico ( ) Faculdade ( ) Ainda não sei

Se não pretende fazer faculdade, por quê?

6. Você sabe o que é a FUVEST? ( ) sim ( ) não

7. Você sabe o que é o ENEM? ( ) sim ( ) não

9. Você sabe onde uma pessoa formada em Matemática Aplicada pode trabalhar? Assinale quantas alternativas quiser.

( ) banco ( ) universidade ( ) indústria ( ) seguradora ( ) hospital  
( ) agência de marketing e publicidade ( ) agência do governo ( ) companhia  
aérea ( ) companhia telefônica ( ) outro

10. Você sabe onde uma pessoa formada em Estatística pode trabalhar?  
Assinale quantas alternativas quiser.

( ) banco ( ) universidade ( ) indústria ( ) seguradora ( ) hospital  
( ) agência de marketing e publicidade ( ) agência do governo ( ) companhia  
aérea ( ) companhia telefônica ( ) outro

11. Você conhece ou já ouviu falar da USP São Carlos?

( ) sim ( ) não

12. Você conhece o curso de Matemática Aplicada da USP São Carlos?

( ) sim ( ) não

13.Você conhece o curso de Estatística da USP São Carlos?

( ) sim ( ) não

### **Comentários sobre a Análise Descritiva dos Dados do Questionário**

Conforme pode ser observado no relatório em anexo, esta pesquisa preliminar e que deverá ser repetida em outras escolas, mostra, principalmente, que aproximadamente 80% dos estudantes não conhecem o curso do ICMC de Estatística e 60% o de Matemática Aplicada. Esta pesquisa mostrou, também, o desconhecimento dos estudantes sobre as áreas de atuação de um graduado em Estatística ou Matemática Aplicada. Interessante destacar que, apesar desta falta de informação sobre cursos superiores na área de Matemática, aproximadamente 50% dos alunos declararam gostar e ter interesse por conteúdos de Matemática.

Outro ponto que chamou atenção foi que uma parte significativa dos estudantes que declararam não ter interesse em cursar uma faculdade após a conclusão do Ensino Médio atribuem esta escolha ao fato de serem pobres ou não terem dinheiro para pagar o curso.

Outras análises podem ser observadas no relatório anexado ao final deste documento, mas a conclusão que podemos tirar deste estudo inicial é de que a disseminação do conhecimento científico é fundamental para o desenvolvimento do senso crítico e envolvimento consciente da sociedade nos temas ligados à ciência e à tecnologia. O desenvolvimento dessas áreas leva a transformações na vida das pessoas e à descoberta de talentos especiais. Precisamos ensinar Matemática e Estatística para formarmos bons cidadãos e para descobrir jovens talentos para a carreira científica. Esperamos, assim, possibilitar que os alunos e professores envolvidos neste projeto e os demais cidadãos da cidade de São Carlos, representados pelos alunos e professores das escolas públicas e particulares da cidade, sintam-se incluídos socialmente nas atividades desenvolvidas pela USP e que especialmente os alunos dessas escolas possam aprender Ma-

temática e Estatística e conhecer os cursos oferecidos pelo ICMC-USP, com o objetivo de terem melhores oportunidades no mercado de trabalho e, também, de contribuírem para o desenvolvimento científico e tecnológico do país.

### **E-mail de Agradecimento da Professora Maria Laura Trindade**

*De: "Maria Laura" <proflaurinha@yahoo.com.br>*

*Para: sme@icmc.usp.br*

*Segunda-feira, 21 de Novembro de 2016 17:17:03*

*Assunto: agradecimentos*

*Boa tarde. Venho através deste simples e-mail agradecer as várias oportunidades que nossa escola, em especial eu e meus alunos, tanto do ensino médio como do fundamental II, temos recebido por parte da universidade através da professora Cynthia de Oliveira Lage Ferreira. É com grande satisfação que agradeço a todas as atividades que foram desenvolvidas em nossa escola. Eu sou professora titular de cargo da EE Dr. Álvaro Guião e nesse ano tive a satisfação de receber alguns trabalhos em parceria com a professora Cynthia. Esta se mostrou sempre solícita e incansável em trazer oportunidades e atividades aos nossos alunos que só contribuíram para o crescimento de cada um de nós com certeza. Ela tão bem acolheu quatro alunos no programa de Iniciação científica que tem ajudado muito no desenvolvimento de cada aluno. Os alunos não recebem nenhuma bolsa, mas estão muito felizes com essa oportunidade de estudo orientado. Falam para mim de todas as coisas que aprendem e tem se mostrado muito felizes todos e dedicados. Também recebemos a professora Cynthia, junto com os bolsistas Guilherme e Gabriela para trabalhar com os colegas em palestras muito interessantes. Na semana passada tivemos o Guilherme trabalhando com palestras com o oitavo e sétimo anos. Na palestra e oficina, os alunos puderam ver a matemática em desenhos animados e foram orientados a*

*construírem árvores de possibilidades e também realizar com recortes e colagens atividades de cálculo e minimização de custo. Foi maravilhoso o trabalho com as crianças. Estarei amanhã enviando fotos que mostram o trabalho maravilhoso. Inenarrável a alegria e o desempenho das crianças com essa atividade que foi perfeitamente adequada para eles. Só tenho a agradecer e conto com mais atividades futuramente que liguem nossos alunos da escola pública a universidade. Cordialmente agradeço muito a professora Cynthia e aos bolsistas que tão carinhosamente trouxeram esse trabalho que foi um verdadeiro sucesso.*

*Um abraço. Professora Maria Laura Trindade.*

## **Atividades a Serem Desenvolvidas em 2017**

Em 2017, pretendemos continuar levando o *Seminário de Coisas Legais* à E.E. Dr Álvaro Guião, visando principalmente, os alunos do Ensino Médio. Além disso, pretendemos realizar nesta escola, no início do ano letivo, a atividade 2, *Pergunta Jovem !*. Esta atividade contará com a participação de alguns professores do ICMC, conforme descrito acima, e terá como objetivo tirar dúvidas dos alunos sobre vida acadêmica, carreira científica e mercado de trabalho. Nesta ocasião, pretendemos, também, levar e debater com os alunos os resultados obtidos com o questionário aplicado neste ano de 2016 e descrito acima.

Em paralelo, gostaríamos de contactar pelo menos mais 2 ou 3 escolas das redes pública e particular com o objetivo de aplicarmos o mesmo questionário aplicado na E.E. Dr Álvaro Guião aos alunos do Ensino Médio, apresentarmos algum dos *Seminários de Coisas Legais* e realizarmos, também, a atividade 2, *Pergunta Jovem !*.

## Esclarecimentos de Questões Levantadas nos Pareceres

### Sobre o Projeto de Pesquisa "Diagramas de Voronoi"

Um dos pontos levantados pelos pareceristas é a falta de menção no relatório atual desta docente ao projeto proposto na ocasião do relatório do primeiro período de experimentação.

No final de setembro de 2014, época do cumprimento das exigências referentes ao primeiro período de experimentação, enviei junto com a documentação solicitada, o projeto de pesquisa intitulado "Estudo Computacional de Variedades e Orbifolds Geométricos de Dimensão 3". Este trata-se do estudo de diagramas de Voronoi no contexto da geometria hiperbólica. O tema diagrama de Voronoi é de interesse secundário desta docente, que trabalhou com este assunto durante o mestrado.

Entretanto, vale ressaltar que nesta ocasião, encontrava-me em licença maternidade e diante das dificuldades óbvias da condição materna deste período, acabei por encaminhar este projeto antigo de diagramas de Voronoi, com a única finalidade de cumprir com o protocolo exigido.

Na época questioneei a validade de um relatório e projeto produzidos numa situação em que estava dispensada de quaisquer tarefas trabalhistas, mas recebi como resposta do Departamento SME que os prazos não poderiam ser alterados.

Aconteceu que, após ter tal documentação avaliada, fui solicitada pelo Conselho do Departamento SME a apresentar, no período de um ano, novo relatório de atividades e a refazer o projeto de pesquisa, visando um tema mais próximo ao meu projeto FAPESP vigente na época, que tratava do estudo de sistemas complexos biológicos e que, de fato, se aproximasse mais dos meus interesses.

Isto acabou sendo feito e, por esta razão, meu projeto atual trata do estudo de redes complexas biológicas.

Entretanto, continuo, ainda que de forma mais discreta, o estudo de diagramas de Voronoi. Atualmente tenho um aluno de iniciação científica trabalhando no tema, cujos resultados obtidos até o momento, descrevo a seguir.

### **Resultados da Pesquisa do Tema Diagramas de Voronoi**

Este projeto vem sendo desenvolvido desde julho de 2015 e conta com a colaboração do aluno de iniciação científica Leonardo Souza Lemes, do curso de Bacharelado em Ciência de Computação.

Até o momento, foi desenvolvido um algoritmo próprio para o cálculo do diagrama de Voronoi bidimensional, considerando a geometria Euclidiana. Este algoritmo desenvolvido se adapta naturalmente para dimensão 3 e superiores, bem como para outras geometrias, como, por exemplo, a hiperbólica.

Atualmente, estamos finalizando a adaptação deste algoritmo para o cálculo do diagrama de Voronoi hiperbólico bidimensional. Ao final desta etapa, pretendemos usar o código desenvolvido para a determinação do domínio de Dirichlet de grupos Fuchsianos com finitos geradores e, também, estudar as deformações de grupos Fuchsianos e as variações dos domínios de Dirichlet correspondentes. Pretendemos submeter este trabalho, ou pelo menos parte dele, ao SIBGRAPI 2017, que acontecerá em Niterói-RJ em outubro.

### **Sobre o Engajamento na Pós-Graduação**

Outro ponto levantado pelos pareceristas é o pouco engajamento na Pós-Graduação por parte desta docente. Atualmente, oriento, como “orientadora fantasma”, um

aluno de mestrado, pois, desde minha admissão neste Instituto, não me foi dada a chance de ingresso na Pós-Graduação. Nem mesmo para esta orientação pontual. Vale observar que este aluno chegou até mim após uma reunião da Pós-Graduação da qual participei, no fim de 2014, para tratar da distribuição dos alunos de mestrado ingressantes. Havia ficado acordado que eu orientaria este aluno mas depois, quando enviei a documentação solicitando o credenciamento para tal orientação, esta foi indeferida. Posteriormente, fui impedida pela Pós-Graduação de participar como membro da banca de qualificação deste aluno, ainda que fosse do conhecimento de que este aluno estava sendo efetivamente orientado por mim.

Além do credenciamento para esta orientação específica, solicitei, também, o credenciamento no mestrado profissional MECAI, no início de 2015, considerando, principalmente, a nova ênfase interdisciplinar ( Ciência de Dados: Agricultura, Medicina e Infraestrutura ) que estava sendo criada na ocasião e que tem bastante relação com os temas de pesquisa de meu interesse pessoal. Entretanto, novamente, tive minha solicitação indeferida.

## **Sugestões de Atividades a serem Desenvolvidas pela Docente**

Gostaria de propor um maior engajamento em atividades de graduação, extensão e administrativas, com o objetivo de colaborar de maneira mais efetiva com as diretrizes e interesses do departamento, levando em conta o tripé Ensino-Pesquisa-Extensão, enquanto as atividades de pesquisa por mim desenvolvidas, de fato, não se concretizam.

Coloco-me a disposição para lecionar uma quantidade de disciplinas de grad-

uação acima da média do Departamento SME, a participar de um número maior de comissões que os demais colegas e a continuar com atividades de extensão, visando à divulgação do conhecimento científico e, indiretamente, à valorização dos cursos de graduação do ICMC.

Entretanto, faz-se necessário o reconhecimento e a valorização de tais atividades por parte do Departamento SME, que atualmente, só parece enxergar a pesquisa como a única atividade digna de mérito. De fato, gostaria de citar um trecho do informe da reitoria, *Um novo patamar para a avaliação institucional e docente na USP*, enviado no último dia 30 de novembro por e-mail aos docentes da USP e que mostra que todas as atividades em ensino, pesquisa e extensão devem ser igualmente valorizadas e contribuem para o crescimento da Universidade:

*... O projeto acadêmico será a peça fundamental de toda essa engrenagem e as Unidades, os Departamentos e os docentes serão essenciais para que o processo funcione em harmonia.*

*Uma das principais inovações da nova sistemática é que cada docente, em seu projeto acadêmico, terá a oportunidade de definir, levando em conta as diretrizes do Departamento e o período de avaliação, as especificidades referentes à sua contribuição para as atividades-fim da Universidade.*

*Desse modo, um professor que pretenda, por exemplo, ser avaliado prioritariamente por suas atividades no ensino de graduação terá a oportunidade de assim estabelecer em seu projeto acadêmico, assim como um docente pode escolher a pesquisa, a cultura ou a extensão como sua área de atuação principal. Isso certamente não impede que cada um desenvolva ações nos outros eixos...*

## Pesquisas em Andamento ou Submetidas

Gostaria de, brevemente, destacar novamente os trabalhos que venho desenvolvendo. Há de se observar que esta docente tem interesse por temas interdisciplinares e atuais.

O trabalho intitulado *O modelo de Hopfield aplicado à redes complexas com o uso do pacote NetworkX para Python*, baseado na iniciação científica da aluna Victoria Maria Gomes Velame foi submetido à *Revista Brasileira do Ensino de Física (Qualis: A2/A1, Área de Avaliação: interdisciplinar/ensino)*. A versão submetida encontra-se anexada a este recurso. Esta versão já recebeu uma primeira avaliação dos revisores da revista que sugeriram desenvolver um pouco mais a seção 3.3 (aplicações às redes complexas) para posterior publicação. Atualmente, estamos trabalhando em novas simulações para submetermos o artigo novamente.

O trabalho intitulado *Resilience and structure of metabolic networks*, baseado na iniciação científica do aluno Victor Hugo de Mello Pessoa encontra-se em fase final da redação do artigo e pretendemos submetê-lo ao jornal *Molecular BioSystems (Qualis: A2, Área de Avaliação: interdisciplinar)* o mais breve possível. Um resumo dos principais resultados obtidos neste trabalho encontra-se em anexo.

A docente está desenvolvendo, em colaboração com o aluno de mestrado Filomen Incahuanaco Quispe, um trabalho relacionado à análise e classificação das estruturas do citosqueleto a partir de imagens de microscopia de fluorescência. Este trabalho deverá ser submetido à um jornal de circulação internacional até fevereiro de 2017. Um resumo dos principais resultados obtidos até o momento encontra-se em anexo. Este trabalho conta, também, com a colaboração recente do professor João do Espírito Santo Batista Neto, do ICMC.

# ANEXO 1- Pesquisas em Andamento

## 1) Resiliência e estrutura das redes metabólicas de diferentes espécies

Victor Hugo de Mello Pessoa e Cynthia de Oliveira Lage  
Ferreira

### Introdução

Em biologia, os processos que ocorrem nas células, gerando transferência de massa, energia e informação são modelados através de uma rede complexa de constituintes celulares e reações. Essas redes são chamadas de redes metabólicas e apesar do papel fundamental delas em manter as funções celulares, a sua estrutura em larga escala é essencialmente desconhecida e inexplorada.

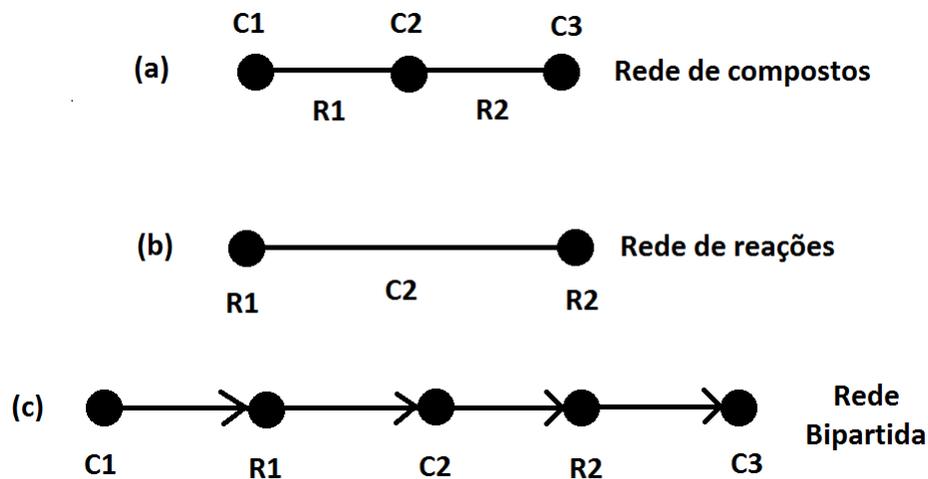
Para uma abordagem geral de visualização e de análise, representa-se tais redes como um grafo com dois tipos diferentes de vértices (metabólitos ou compostos e reações). Neste trabalho, entretanto, para uma análise mais simples, as redes metabólicas são representadas por um grafo direto cujos vértices representam os metabólitos e as arestas que os conectam representam a reação de conversão de um metabólito para o outro (rede de compostos). Além disso, podemos considerar o inverso, com vértices representando reações e as arestas representando metabólitos (rede de reação). Veja tais representações na figura

abaixo. A desvantagem desta representação é que, se os metabólitos recorrentes não forem removidos, atalhos biologicamente sem sentido podem ser introduzidos na rede.

Redes metabólicas pertencem à classe de redes livre de escala. Uma propriedade importante de uma rede livre de escala é que distribuição de graus acumulada segue uma lei de potências, diferente de uma rede aleatória que tem uma distribuição de Poisson. Com efeito, estudos recentes têm demonstrado que a probabilidade de um metabólito reagir com  $k$  outros metabólitos decai seguindo uma lei de potência  $P(k) = \alpha k^{-\gamma}$  [1].

Uma pergunta importante a ser respondida pelos pesquisadores de sistemas biológicos diz respeito à relação entre a estrutura e a função dessas redes, em especial, no que diz respeito ao fluxo de informação e regulação dos sinais celulares [6].

Neste trabalho, nós investigamos a estrutura e função com relação à resiliência das redes. Para tal, fazemos uma análise comparativa das redes metabólicas de diferentes espécies, considerando as redes de compostos e de reação. Nós calculamos a entropia da distribuição de grau, a entropia dinâmica dessas redes e a correlação entre essas medidas de entropia e algumas características topológicas das redes. Estas medidas de entropia são medidas relacionadas com a robustez de um processo de Markov. Em particular, a entropia dinâmica de um processo de Markov foi aplicada na análise da rede de proteínas da levedura *S. cerevisiae*, concluindo que proteínas com grande contribuição para a entropia da rede são frequentemente letais [3]. Além disso, a correlação entre as medidas de entropia e medidas topológicas foram investigadas para estudar a resiliência das redes de proteínas, revelando que os *hubs* e o grau médio dos vizinhos contribuem significativamente para a resiliência dessas redes [2].



## Redes Metabólicas

### Base de Dados

As redes utilizadas para o desenvolvimento desta pesquisa foram obtidas da base de dados Reactome (v56 - [www.reactome.org](http://www.reactome.org)). Foram consideradas as redes metabólicas de todas as vias bioquímicas dos seguintes organismos: *Saccharomyces cerevisiae* (1450 vértices), *Caenorhabditis elegans* (2019 vértices), *Drosophila melanogaster* (2221 vértices) e *Homo sapiens* (4688 vértices). Estas redes são compostas por moléculas convertidas em metabólitos por reações químicas e, frequentemente, são catalizadas por enzimas. Neste sentido, é conveniente esquematizá-las como redes bipartidas, sendo que um dos conjuntos de nós representa as reações bioquímicas e o outro, de metabólitos. A fim de simplificar as análises, as redes bipartidas foram convertidas em duas redes, uma em que os nós representam metabólitos e as reações representam arestas (denominadas redes de compostos) e em uma que segue a lógica oposta, onde as reações são nós e os compostos são arestas (redes de reações).

## Metabólitos Recorrentes

Os metabólitos recorrentes são moléculas que fazem parte de um número grande de reações químicas com papéis secundários, auxiliando a catalização das reações químicas e, conseqüentemente, na obtenção dos metabólitos principais. A água, por exemplo, por vezes pode participar de uma reação para doar um próton a uma cadeia lateral de aminoácido e torná-lo reativo, favorecendo o andamento de uma reação.

Esta recorrência gera uma falsa conclusão na análise dos parâmetros topológicos da rede. De fato, como estas moléculas tendem a figurar em um grande número de reações, a rede metabólica do organismo tende a apresentar falsos caminhos entre os metabólitos, pois neste caso há "pontes" entre vias bioquímicas que possuem esta molécula em comum. Trabalhos recentes [4] caracterizam os metabólitos recorrentes por serem nós da rede com alta centralidade: *ATP*, *ADP*, *NADP<sup>+</sup>*, *NADPH*, *NAD<sup>+</sup>*, *NADH*, *P<sub>i</sub>*, *PP<sub>i</sub>*, *CO<sub>2</sub>*, *H<sub>2</sub>O*, *H<sup>+</sup>*, *NH<sub>3</sub>*, *SO<sub>4</sub>*, *O<sub>2</sub>*. Neste sentido, nossa análise considerou 2 tipos de redes, conforme dito acima, nas quais os metabólitos recorrentes não foram considerados: redes de compostos, nas quais os nós representam metabólitos e as reações representam arestas e redes de reações, as reações são nós e os compostos são arestas.

## Análise das Redes: Medidas Topológicas e Medidas de Entropia

A estrutura das redes complexas podem ser representados como um grafo, denotado pelo par ordenado  $G = (V, E)$  formado por um conjunto  $V = \{1, 2, \dots, i, \dots, N\}$  de vértices, ligado por um conjunto  $E = \{e_1, e_2, \dots, e_M\}$  de arestas. Cada aresta

representa uma ligação entre dois vértices,  $e_p = (i, j)$ , e indica a ligação entre os vértices  $i$  e  $j$ .

Uma rede pode ser representada pela sua matriz de adjacência  $A$ . Os elementos  $a_{ij}$  são iguais a 1 sempre que houver uma aresta conectando os vértices  $i$  e  $j$ , e igual a 0 caso contrário. Quando o grafo é sem direção, a matriz de adjacência é simétrica, e os elementos  $a_{ij} = a_{ji}$  para qualquer  $i$  e  $j$ .

As redes metabólicas podem ser caracterizados de acordo com sua estrutura e topologia através de medidas da rede que caracterizam sua conectividade, a presença de ciclos e as distâncias entre os nós. Neste trabalho consideramos as seguintes medidas topológicas: grau ( $k$ ), conectividade média dos vizinhos ( $r$ ), caminho mínimo médio ( $sp$ ), coeficiente de agrupamento médio ( $cc$ ), coeficiente de assortatividade ( $s$ ), diâmetro ( $d$ ) e tamanho da maior componente conexa ( $S$ ). Para maiores informações e definições destas medidas, vide [7].

Consideramos, também, em nossa análise medidas de entropia pois estas estão relacionadas à resiliência das redes a ataques [5]. A entropia de distribuição de grau diz respeito à heterogeneidade da rede, medindo a diversidade de ligação entre os nós, e é calculada por  $H = -\sum_k P(k)\log[P(k)]$ . Já a entropia dinâmica de uma rede está associada à diversidade de caminhos possíveis entre os nós, sendo calculada por  $H_d = -\sum_{i,j} \pi_i p_{ij} \log(p_{ij})$ , em que  $p_{ij}$  é o elemento da matriz estocástica, tal que  $p_{ij} = a_{ij}/k_j$ , com  $a_{ij}$  elemento da matriz de adjacência da rede, isto é, o elemento  $p_{ij}$  representa a probabilidade de haver um deslocamento aleatório de  $i$  a  $j$  em um passo. E  $\pi_i$  representa o autovetor associado ao (maior) autovalor 1 da matriz estocástica  $P$ , tal que  $\pi P = \pi$ .

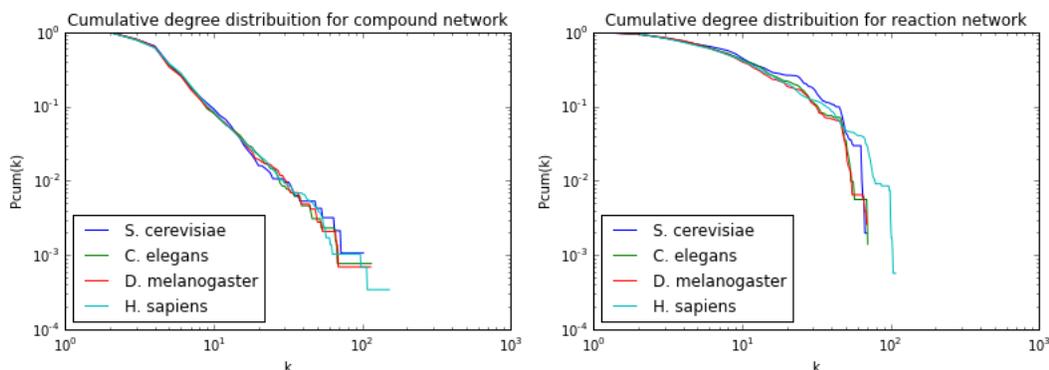


Figure 1: Distribuição de grau acumulada das redes de compostos e de reação das 4 espécies estudadas.

## Caracterização das Redes Metabólicas

As redes de compostos obtidas têm características de redes livres de escala, apresentando distribuição de grau em escala logarítmica com tendência linear. A aproximação das curvas das distribuição de grau acumulada das espécies obedece a lei de potências  $P_{cum}(k) = \alpha k^\gamma$ . Uma tabela com os valores de  $\gamma$  obtidos através do método do mínimos quadrados e com as demais medidas topológicas e de entropia das redes metabólicas é mostrada abaixo.

| Medidas Topológicas               |      |      |      |     |       |       |          |      |       |
|-----------------------------------|------|------|------|-----|-------|-------|----------|------|-------|
| Espécies                          | $S$  | $cc$ | $sp$ | $d$ | $r$   | $s$   | $\gamma$ | $H$  | $H_d$ |
| <i>S.cerevisiae</i> (compostos)   | 943  | 0.76 | 5.72 | 17  | 5.32  | -0.07 | -1.86    | 0.96 | 2.84  |
| <i>S.cerevisiae</i> (reação)      | 507  | 0.62 | 4.99 | 16  | 14.79 | 0.71  | -1.29    | 1.47 | 2.49  |
| <i>C.elegans</i> (compostos)      | 1302 | 0.75 | 6.58 | 21  | 5.21  | -0.06 | -1.98    | 0.95 | 2.98  |
| <i>C.elegans</i> (reação)         | 717  | 0.63 | 5.77 | 20  | 12.94 | 0.73  | -1.57    | 1.45 | 2.66  |
| <i>D.melanogaster</i> (compostos) | 1447 | 0.76 | 6.49 | 20  | 5.20  | -0.06 | -2.02    | 0.94 | 3.02  |
| <i>D.melanogaster</i> (reação)    | 774  | 0.62 | 5.65 | 19  | 12.28 | 0.72  | -1.55    | 1.43 | 2.69  |
| <i>H.sapiens</i> (compostos)      | 2926 | 0.70 | 6.98 | 20  | 5.29  | -0.04 | -2.05    | 0.99 | 3.32  |
| <i>H.sapiens</i> (reação)         | 1762 | 0.57 | 6.34 | 19  | 13.65 | 0.76  | -1.62    | 1.48 | 3.00  |

Table 1: Conjunto de medidas dos 2 tipos de redes metabólicas das 4 espécies estudadas : tamanho da maior componente conexa ( $S$ ), coeficiente de agrupamento médio ( $cc$ ), caminho mínimo médio ( $sp$ ), diâmetro ( $d$ ), conectividade média dos vizinhos ( $r$ ), coeficiente de assortatividade ( $s$ ), expoente da lei de potências ( $\gamma$ ), entropia da distribuição de grau ( $H$ ) e entropia dinâmica ( $H_d$ ).

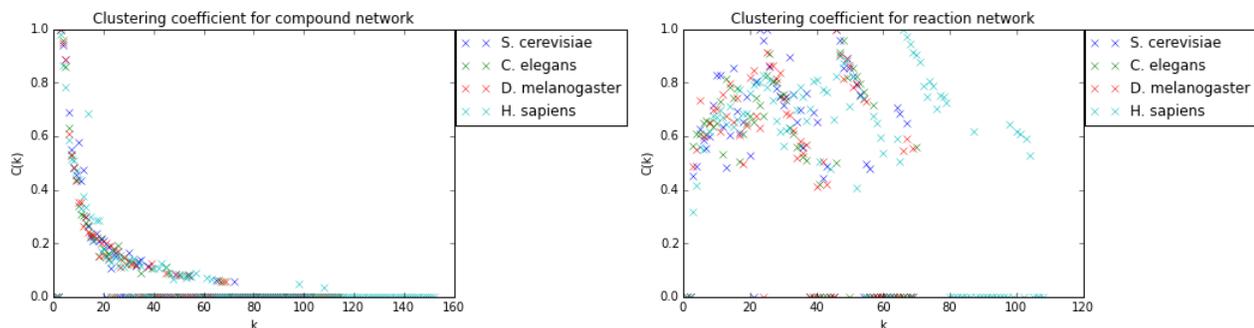


Figure 2: Distribuição do coeficiente de aglomeração das redes de compostos e de reação das 4 espécies estudadas.

O coeficiente de agrupamento médio é relativamente grande, especialmente para as redes de compostos, o que indica que estas redes têm uma estrutura modular. Observa-se que a distribuição do coeficiente de agrupamento das redes compostas  $C(k)$  segue uma lei de potência que indica que estas redes têm uma estrutura hierárquica (ver figura abaixo). Além disso, os valores pequenos do caminho mínimo médio indicam que estas redes são do tipo mundo pequeno, que pode ser uma consequência da presença de *hubs* e da estrutura modular. O diâmetro de todas as redes varia entre 16 e 21. A conectividade média dos vizinhos é maior para as redes de reação. As redes de reação são assortativas, com grande coeficiente  $s$ , indicando que nós com grau semelhante tendem a se conectar e, inversamente, as redes compostas são disassortativas, com menor coeficiente  $s$ . Finalmente, observamos que as redes compostas têm menor expoente  $\gamma$ , o que significa que estas redes têm topologia caracterizada por nós altamente conectados.

## Ataques Aleatórios

Para a análise da resiliência das redes, foi realizada a remoção aleatória de nós das redes de compostos e de reações, sem regra preferencial para a escolha dos nós removidos. A medida que foram realizados os ataques, foram recalculados o tamanho da maior componente conexa da rede, diâmetro e o caminho mínimo médio, como representado nas figuras seguintes. Estas medidas são cruciais para a caracterização da resiliência das redes, visto que expressam sua resistência à desagregação em simulações de estresse nestes organismos. Como as redes apresentam tamanhos diferentes e suas medidas apresentam dimensões proporcionais ao seu tamanho, os gráficos representativos de suas grandezas foram normalizados com relação às medidas originais da rede (antes de realizados os ataques). Esta consideração é apropriada para se evitar que as considerações dos resultados sejam influenciadas pelas dimensões da rede, permitindo análise uniforme dos resultados.

Nas figura 3 podemos observar que os dois tipos de redes (compostos e reação) de todas as espécies apresentam um comportamento semelhante. A principal diferença ocorre com o diâmetro do *H.sapiens*. Enquanto diminui nas outras espécies, o diâmetro aumenta para ambas as redes desta espécie. Além disso, o caminho mínimo médio de todas as redes apresentam variações muito pequenas. Portanto, as redes de todas as espécies apresentam comportamento semelhante quando consideramos ataques aleatórios.

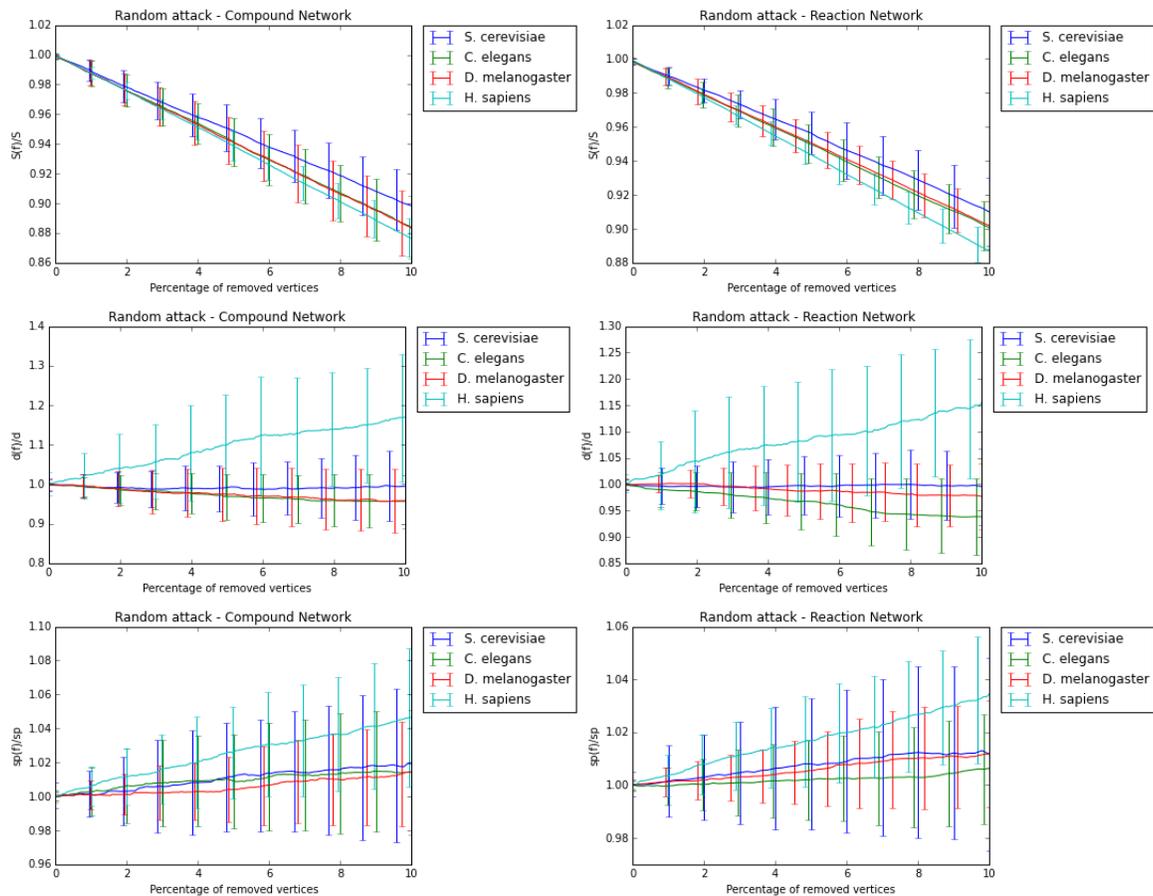


Figure 3: Variação da medidas topológicas das redes de compostos e de reação das 4 espécies estudadas com relação a porcentagem de vértices removidos aleatoriamente: tamanho da maior componente conexa ( $S$ ), diâmetro ( $d$ ) e caminho mínimo médio ( $sp$ ). Resultado da média de 200 simulações.

## Ataques Intencionais

A resiliência das redes metabólicas também foi estudada com relação a ataques intencionais. Os nós mais conectados foram removidos sequencialmente, de acordo com o seu grau. Fizemos tal análise até remover 5 por cento do número total de vértices de cada rede e calculamos a variação relativa das medidas, como mostrado nas figura 4. Tal como no caso dos ataques aleatórios, a variação relativa foi obtida pela relação entre a medida calculada quando uma fração dos nós foi removido e a medida original. A variação estrutural das redes depende do organismo. As redes de compostos se mostraram bem mais sensíveis aos ataques intencionais do que as redes de reação, como era previsto, devido a natureza livre de escala de tais redes e, conseqüentemente, devido à presença de poucos *hubs* concentrando um maior número de ligações na rede. A rede de compostos do *H.sapiens* apresentam menor diminuição do tamanho da maior componente conexa com relação às demais espécies, ficando reduzida a aproximadamente 35% do tamanho original enquanto as demais espécies tiveram o tamanho reduzido para entre 10% e 20%, indicando maior resiliência da espécie *H.sapiens*. Entretanto, observa-se o aumento das medidas de diâmetro e caminho médio desta espécie. No que diz respeito às redes de reações, podemos destacar a variação repentina do diâmetro da rede *H.sapiens*, indicando que poucos nós podem ter influência com relação a esta medida. Na próxima seção vamos estudar as medidas topológicas e sua relação com a resiliência das redes metabólicas.

## Relação entre a Estrutura da Rede e a Resiliência

As medidas de entropia estrutural ( $H$ ) e dinâmica ( $H_d$ ) foram calculadas a fim de quantificarmos a robustez das redes. A entropia estrutural caracteriza a

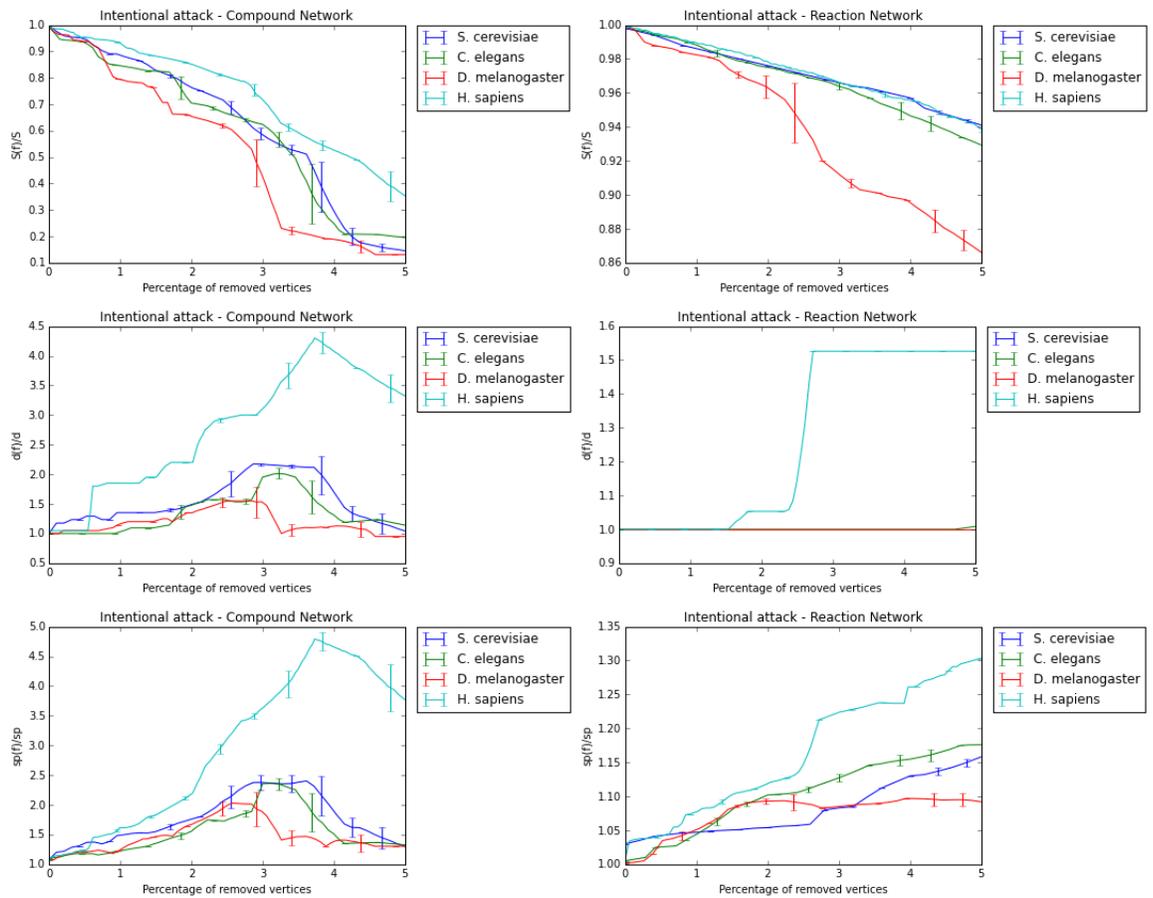


Figure 4: Variação da medidas topológicas das redes de compostos e de reação das 4 espécies estudadas com relação a porcentagem de vértices removidos intencionalmente: tamanho da maior componente conexa ( $S$ ), diâmetro ( $d$ ) e caminho mínimo médio ( $sp$ ). Resultado da média de 200 simulações.

heterogeneidade da rede e mede a diversidade da distribuição de grau  $P(k)$ . Já a entropia dinâmica caracteriza a diversidade dos caminhos da rede. A tabela 1 mostra as entropias obtidas para cada rede. Comparando estes valores com os resultados dos ataques intencionais, mostrados na figura 4, observamos que a espécie *H.sapiens*, mais resiliente, possui os maiores valores das entropias estrutural e dinâmica.

Nós consideramos um conjunto de seis medidas: diâmetro ( $d$ ), coeficiente de agrupamento médio ( $cc$ ), caminho mínimo médio ( $sp$ ), conectividade média dos vizinhos ( $r$ ), coeficiente de assortatividade ( $s$ ) e o expoente da lei de potências ( $\gamma$ ) e calculamos a correlação de Pearson ( $\rho$ ) de cada uma destas medidas com relação às entropias estrutural e dinâmica. A maior correlação da entropia estrutural tanto das redes de compostos quanto das redes de reação foi com relação à conectividade média dos vizinhos  $r$ , com  $\rho = 0.74$  para as redes de compostos e  $\rho = 0.79$  para as redes de reação. De fato, grandes valores da conectividade média dos *hubs* indicam alternativas de conexões entre os vizinhos de tais nós, o que favorece a resiliência e minimiza os efeitos da remoção dos *hubs*. Outra medida de correlação relevante para ambas entropias (estrutural e dinâmica) tanto para as redes de compostos quanto para as redes de reação foi com relação ao coeficiente de assortatividade ( $s$ ). De fato, redes assortativas são consideradas mais robustas à remoção de vértices do que as redes desassortativas. Observando na figura 4, o gráfico da variação da maior componente conexa  $S(f)/S$ , notamos que as redes de reação são mais resilientes, o que era esperado, pois apresentam coeficiente de assortatividade elevado, conforme mostrado na tabela 1.

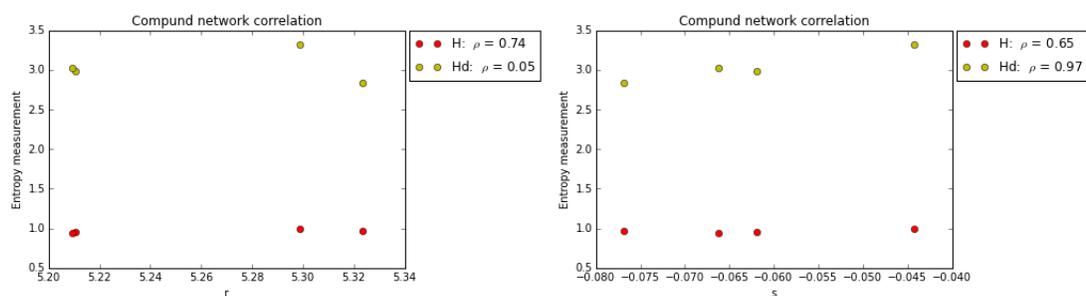


Figure 5: Redes de compostos: medidas das correlações entre as medidas de entropia e conectividade média dos vizinhos e o coeficiente de assortatividade.

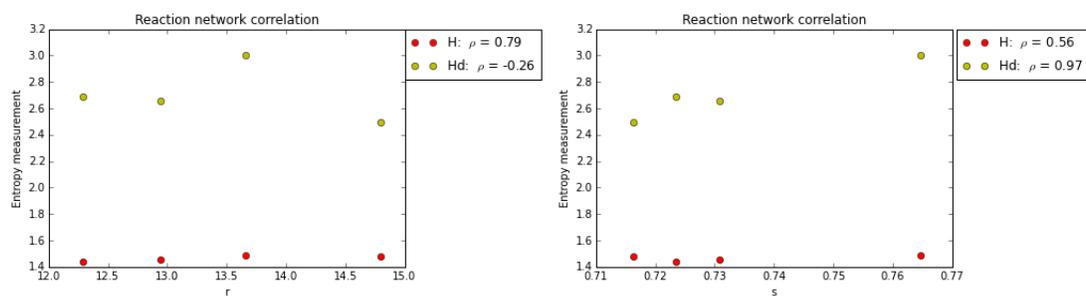


Figure 6: Redes de reações: medidas das correlações entre as medidas de entropia e conectividade média dos vizinhos e o coeficiente de assortatividade.

## Conclusão

Este trabalho teve como objetivo investigar o comportamento das redes metabólicas sob a ação de ataques aleatórios e intencionais. Nós estudamos o comportamento das redes de quatro espécies: *Saccharomyces cerevisiae*, *Caenorhabditis elegans*, *Drosophila melanogaster* e *Homo sapiens*. Foram consideradas nesta análise dois tipos de redes metabólicas: rede de compostos e rede de reações. Simulações computacionais mostraram que o tamanho da maior componente conexa ( $S$ ), o diâmetro ( $d$ ) e o caminho mínimo médio ( $sp$ ) possuem variações similares em todas as espécies tanto para as redes de compostos quanto para as redes de reações quando sujeitas à remoção aleatória dos nós. Por outro lado, estas redes demonstraram variações topológicas diferentes quando sujeitas à ataques intencionais. As redes da espécie *Homo sapiens* demonstraram maior resiliência. No geral, as redes de reação são mais resilientes do que as redes de compostos.

A relação entre a resiliência e a organização das redes também foi estudada levando em conta duas medidas de entropia (estrutural e dinâmica) e medidas topológicas das redes. Calculamos a correlação entre seis medidas estruturais e estas medidas de entropia. Observamos que duas medidas contribuíram mais decisivamente para a resiliência, conectividade média dos vizinhos e o coeficiente de assortatividade.

Os resultados apresentados são importantes para o entendimento da relação da organização das redes metabólicas e suas funções biológicas. Este tipo de análise pode contribuir, por exemplo, no desenvolvimento de modelos computacionais que descrevem a evolução metabólica dos organismos e auxiliar na compreensão dos mecanismos presentes nos processos naturais de evolução e que contribuem para o surgimento de estruturas mais robustas em tais redes. Além disso, este estudo auxilia no entendimento da representação mais significativa

das redes metabólicas, que podem ser representadas como redes bipartidas ou pelas redes de reação e de compostos.

## References

- [1] H. Jeong, B. Tombor, R. Albert, Z. N. Oltvai and A.-L. Barabási; The large-scale organization of metabolic networks; *Nature* 407, 651-654 (2000).
- [2] Francisco A. Rodrigues, Luciano da Fontoura Costa and Andre Luiz Barbieri; Resilience of protein-protein interaction networks as determined by their large-scale topological features; *Mol. BioSyst.*, 2011, 7, 1263-1269.
- [3] Manke T, Demetrius L, Vingron M.; An entropic characterization of protein interaction networks and cellular robustness; *J R Soc Interface*. 2006 22;3(11):843-50.
- [4] Petter Holme and Mikael Huss; Currency metabolites and network representations of metabolism; *Arxiv* preprint arXiv:0806.2763, 2008.
- [5] Bing Wang , Huanwen Tang, Chonghui Guo and Zhilong Xiub; Entropy optimization of scale-free networks robustness to random failures; *Physica A* 363 (2006) 591-596.
- [6] Stelling J, Klamt S, Bettenbrock K, Schuster S, Gilles ED.; Metabolic network structure determines key aspects of functionality and regulation; *Nature* 14;420(6912):190-3, (2002).
- [7] L. da F. Costa, F. A. Rodrigues, G. Travieso, and P. R. Villas Boas. Characterization of complex networks: A survey of measurements. In *ADVANCES IN PHYSICS*, 2005.

## 2 )Análise e classificação de micrografias celulares baseadas em textura

Filomen Incahuanaco Quispe, Cynthia de O. Lage Ferreira e João do Espírito Santo Batista Neto

### Introdução

O principal objetivo desta pesquisa é fazer uma análise e classificação das estruturas do citosqueleto a partir de imagens de microscopia de fluorescência como as da figura 7, tiradas de Olympus Microscopy Resource Center: Fluorescence Digital Image Galleries <http://www.olympusmicro.com/galleries/index.html>. As técnicas de microscopia de fluorescência são úteis para exibir estruturas e quantificar eventos fisiológicos e bioquímicos nas células vivas. Existem vários indicadores fluorescentes para o estudo de estruturas e produtos químicos fisiologicamente importantes como DNA, estruturas do citoesqueleto, cálcio, magnésio, sódio e enzimas. Nas imagens estudadas, destacamos 3 principais estruturas do citoesqueleto: filamentos de actina, microtúbulos e filamentos intermediários, conforme mostrado na figura 8. Nossa análise e classificação dessas imagens se baseia em textura e para isto consideramos 3 descritores: *Local Binary Pattern (LBP)*, *Bag of Visual Words* e *Textons*. Os resultados preliminares

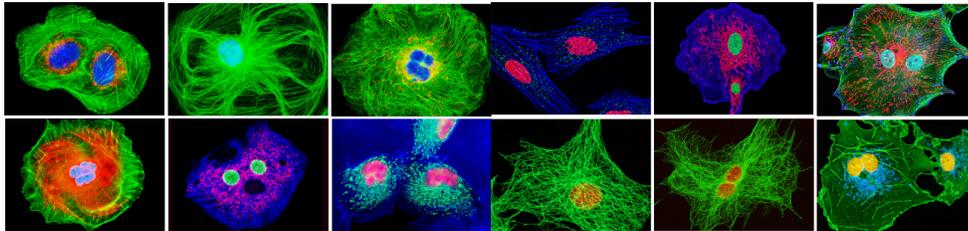


Figura 7: Amostra da base de dados dos experimentos.

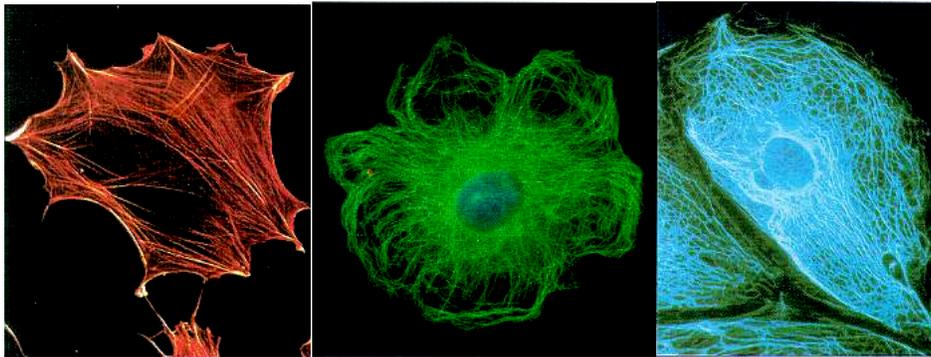


Figura 8: Estruturas do citoesqueleto. Da esquerda para a direita temos: Filamentos de actina, microtúbulos e filamentos intermediários.

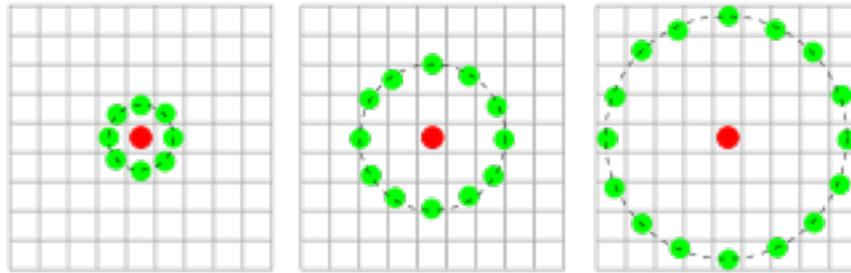


Figure 9: Vizinhança LBP:  $P=8, R=1$ ;  $P=12, R=2$  e  $P=16, R=4$ .

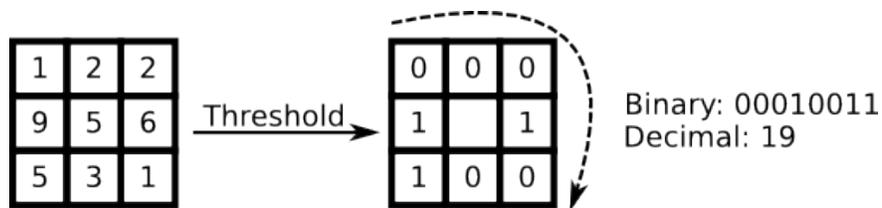


Figure 10: Geração do Código LBP.

estão mostrados abaixo.

## Descritores

### *Local Binary Pattern (LBP)*

Este descritor se baseia por duas medidas complementares: padrões espaciais locais e contraste dos níveis de cinza. Primeiramente, define-se a composição da vizinhança, formada por  $P$  e  $R$ , números de vizinhos e raio, respectivamente. Exemplos de possíveis vizinhanças estão descritas na figura 9. A partir da definição da vizinhança, é gerado um código para cada pixel, baseado na variação dos tons de cinza de cada pixel em relação ao pixel central, conforme a figura

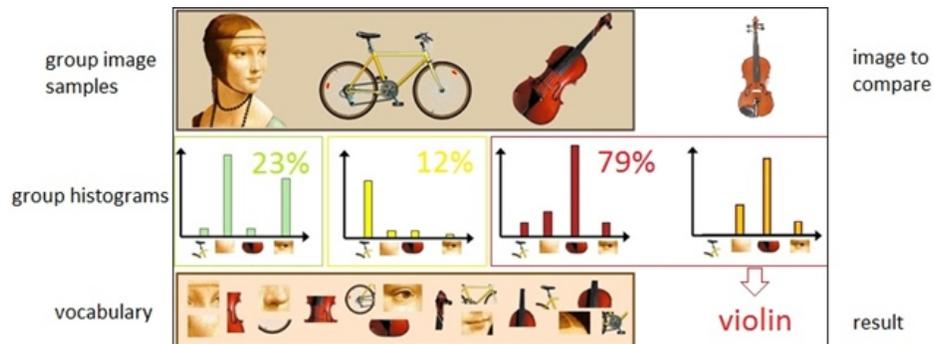


Figure 11: *Bag of visual words* – representando um objeto através de histogramas de ocorrência de palavras. Figura retirada da internet.

10. A partir destes códigos, cria-se um histograma como descritor da imagem.

### *Bag of Visual Words (BoW)*

Podemos representar uma imagem usando o BoW tratando-a como se fosse um documento. Da mesma forma, precisamos definir as "palavras" de uma imagem. Para tal, temos que, geralmente, considerar três etapas: detecção de características, descrição de características e geração de um dicionário visual.

Neste sentido, cada imagem é representada por vários fragmentos locais e os métodos de detecção e descrição de características lidam com as diversas formas de representar estes fragmentos em vetores de características. Nesta etapa, usamos um dos mais famosos descritores de características, conhecido como SIFT (Scale Invariant Feature Transform). O SIFT converte cada fragmento em um vetor de características com 128 *features*. Neste sentido, fica estabelecido um dicionário visual, representado por estes fragmentos e a partir da ocorrência destes fragmentos ou "palavras" em cada imagem, podemos gerar

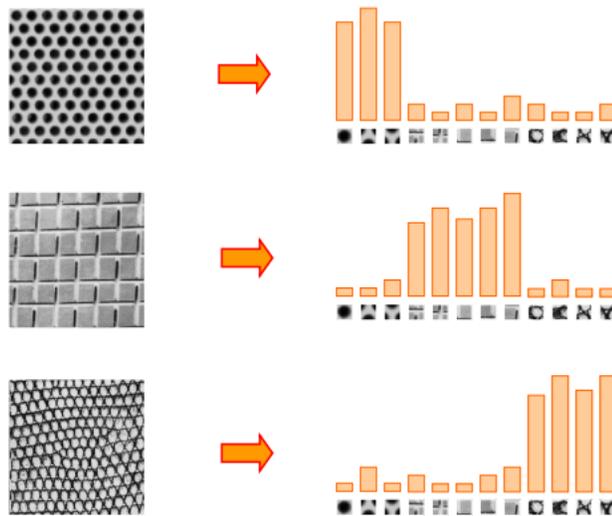


Figure 12: A textura de uma imagem é caracterizada pela repetição de elementos básicos ou *textons*. Figura retirada da internet.

um histograma conforme figura 11.

### *Textons*

Os textons podem ser definidos como micro estruturas presentes em uma imagem, criando um dicionário baseado em diversas configurações geométricas e fotométricas, conforme mostrado na figura 12. Nosso objetivo é usar este conceito de modo a subdividir nossa imagem em pequenos *grids* ( $n \times n$ ), nossos *textons* e, então, considerarmos alguma medida para caracterizá-los, como por exemplo, média e variância dos tons de cinza.

## Resultados Preliminares

Os resultados preliminares analisam a classificação das imagens considerando apenas duas classes: filamentos de actina (MA) e microtúbulos (MT).

Os resultados com o descritor LBP estão descritos na tabela 2. O descritor

LBP foi combinado, também, com a aplicação do filtro de Gabor e a redução da imagem ao sistema de cores HSV. Os classificadores utilizados foram o *multilayer perceptron* (MLP) e o *support vector machine* (SVM).

Os resultados com o descritor *BoW-SIFT* estão descritos na tabela 3. Novamente, os classificadores utilizados foram o *multilayer perceptron* (MLP) e o *support vector machine* (SVM). Em um dos experimentos, foi considerado a redução da imagem ao sistema de cores HSV e em outro experimento o núcleo da célula foi retirado das imagens.

Os resultados considerando como *textons* pequenos *grids* nas imagens e como medida de caracterização a média e a variância dos tons de cinza estão mostrados na tabela 4. Outro resultado utilizando esta ideia dos *textons* está mostrado na tabela 5. Neste resultado o descritor utilizado como medida dos *textons* foi o da referência [1]. Nos dois testes os classificadores utilizados foram o *multilayer perceptron* (MLP) e o *support vector machine* (SVM).

## Próximas Etapas

A fim de explorarmos um pouco melhor as características geométricas dos filamentos que compõe o citoesqueleto, as próximas etapas do trabalho incluem considerar o esqueleto das imagens [2] e um filtro de Fourier como medida dos *textons*. Além disso, objetivamos combinar vários tamanhos do *grid* dos *textons* a fim de levarmos em conta, também, uma interpretação multiescala. De fato, buscamos melhorar a classificação usando *textons*, pois ela é bem mais simples de implementar do que a *BoW-SIFT*. Ademais, consideraremos 3 classes em nossa classificação, conforme figura 8.

| <b>Método</b> | <b>MLP</b>  | <b>c-SVM</b> |
|---------------|-------------|--------------|
| LBP           | $\leq 69\%$ | 52%          |
| LBP + Gabor   | 70%         | 52%          |
| LBP + HSV     | 72%         | 63.09%       |

Table 2: Configurações e resultados para duas classes (MA e MT)

| <b>Configuração</b>                | <b>MLP</b> | <b>c-SVM</b> |
|------------------------------------|------------|--------------|
| 500 <i>KP</i> 50C                  | 87.36%     | 82.76%       |
| 620 <i>KP</i> 50C                  | 91.67%     |              |
| 580 <i>KP</i> 75C (-Nucleo)        | 94.05%     |              |
| (340-640) <i>KP</i> (40-90)C (HSV) | 90.80%     |              |

Table 3: BoW-SIFT - configurações(*KP*=Key Points,*C*=Clusters) e resultados para duas classes (MA e MT), Validação CrossOver 10-Fold

| <b>Configuração</b> | <b>MLP</b> | <b>c-SVM</b> |
|---------------------|------------|--------------|
| 3x3 15C             | 70.11%     | 68.91%       |
| 12x12 8C            | 75.86%     | 72.41%       |
| 9x9 5C              | 72.41%     | 77.0%        |
| 9x9 9C              | 74.7%      | 65.52%       |

Table 4: Textons 1 - configurações(*C*=Clusters) e resultados para duas classes (MA e MT), Validação CrossOver 10-Fold

| Configuração              | MLP    | c-SVM  |
|---------------------------|--------|--------|
| 18x18 16C                 | 74.71% | 64.36% |
| 18x18 48C (d=0.27)        | 74.71% | 80.46% |
| 18x18 48C (d=0.275)       | 73.56% | 81.61% |
| 24x24 48C (d=0.4)         | 80.46% | 74.71% |
| 24x24 48C (d=0.4) [Canny] | 83.91% | 83.91% |

Table 5: Textons 2 - configurações(C=Clusters,d=*similarity distance*) e resultados para duas classes (MA e MT), Validação CrossOver 10-Fold

## References

- [1] Casanova, Dalcimar and Backes, André Ricardo and Bruno, Odemir Martinez; *Pattern recognition tool based on complex network-based approach* (2013).
- [2] Punam K. Saha and Gunilla Borgefors and Gabriella Sanniti di Baja; A survey on skeletonization algorithms and their applications (2015).
- [3] Luciano da Fontoura Costa e Roberto Marcondes Cesar Jr.; *Shape Classification and Analysis: Theory and Practice* (Second Editionn, 2009).

ANEXO 2 - Relatório da Análise Descritiva dos  
Dados Obtidos do Questionário Aplicado aos Alu-  
nos da E.E. Dr Álvaro Guião / Pré-Print do Artigo  
*O modelo de Hopfield aplicado à redes complexas  
com o uso do pacote NetworkX para Python*

Universidade de São Paulo  
Instituto de Ciências Matemáticas e de  
Computação  
Projeto de Cultura e Extensão

**A Matemática e o jovem: despertando  
múltiplas habilidades e talentos**

Aluno: Gabriela Dall'Agnol

Professor orientador: Cynthia de Oliveira Lage Ferreira

Dezembro  
2016

Universidade de São Paulo  
Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação  
Projeto de Cultura e Extensão

## **A Matemática e o jovem: despertando múltiplas habilidades e talentos**

Primeiro Relatório do Projeto de Cultura e Extensão apresentado ao Programa Unificado de Bolsas da Universidade de São Paulo.

Aluno: Gabriela Dall'Agnol

Professor orientador: Cynthia de O. Lage Ferreira

Dezembro  
2016

## *Resumo*

O Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, departamento do campus de São Carlos da Universidade de São Paulo (USP), oferece 8 cursos na área de exatas. Algumas opções de graduação apresentam alto índice de procura pelos vestibulandos, como Ciência da Computação e Engenharia de Computação. Porém, outros cursos como Matemática e Estatística não atraem tanto os estudantes e apresentam uma relação de candidatos por vaga muito baixa, mesmo com perspectivas de carreira e salário igualmente atrativas. Além disso, dentre os aprovados no vestibular, é notável a baixa quantidade de alunos cujas famílias residem na própria cidade de São Carlos. Observa-se a necessidade de intervenção para a disseminação de conhecimento sobre Matemática, divulgação de informações relativas ao campus da USP São Carlos e os cursos nela ofertados, a fim de despertar um maior interesse pela área de exatas nos alunos. Este projeto tem caráter exploratório e pretende analisar o perfil dos alunos da rede pública, a fim de oferecer os meios para o desenvolvimento de políticas e estratégias que despertem maior interesse dos alunos locais para os cursos de exatas existentes.

**Palavras-chave:** Universidade de São Paulo, Cursos de Exatas, Estatística, Matemática, Escolas da Rede Pública

# Conteúdo

|   |                         |    |
|---|-------------------------|----|
| 1 | Introdução              | 1  |
| 2 | Descrição de atividades | 3  |
| 3 | Análise dos Resultados  | 4  |
| 4 | Próximos Passos         | 18 |
| 5 | Considerações Finais    | 19 |
|   | Anexo                   | 21 |

# 1 Introdução

A divulgação da ciência é fundamental para o desenvolvimento consciente da sociedade. A evolução constante de diversas áreas do conhecimento leva a transformações na vida das pessoas e à descoberta de talentos especiais. No entanto, a Universidade de São Paulo (USP) especificamente o campus da cidade de São Carlos enfrenta um problema existente em muitas universidades públicas do país: a presença de alunos provenientes da rede pública de ensino matriculados na universidade é tão pequena quanto o interesse desses jovens em participar do processo seletivo.

Marcelo Knobel, professor da Universidade de Campinas (UNICAMP) afirma que a exclusão nas universidades estaduais e federais ocorre antes mesmo do processo de seleção dos candidatos para os cursos de graduação [2].

Entre 500 mil jovens que concluem o ensino médio anualmente no Estado de São Paulo, aproximadamente 85% estudaram em escolas públicas e 15% em instituições privadas. Já do total de estudantes que prestam vestibular para as principais universidades públicas do país a situação se inverte: na Unicamp, por exemplo, aproximadamente 70% são egressos de escolas privadas e 30% de instituições públicas [2].

Segundo a reportagem da Folha Online [6], a reprovação no vestibular não é a principal justificativa para a baixa presença de alunos da rede pública na USP (pesquisa realizada sobre o campus de São Paulo). A pesquisa Datafolha com jovens da grande São Paulo revela que dos poucos 16% prestam o vestibular, somente 5% tentam a USP.

Ainda segundo a reportagem [6], é grande o número de estudantes sem conhecimento de que a universidade é gratuita e existem também aqueles que acreditam não serem competentes para estudar na USP.

Com o objetivo de estender a universidade aos alunos da cidade de São Carlos que se enquadram nesse contexto, este projeto visa a aplicação de questionários junto aos alunos do ensino médio, com o objetivo de obter as características desses jovens em fase de escolha da carreira, e compreender os interesses desses alunos. Tais questionários servirão como instrumento para coleta de dados, como meio de avaliação do interesse dos alunos pelas áreas de exatas, seu conhecimento em relação aos cursos do ICMC (Instituto Ciência Matemáticas e de Computação) e suas expectativas para serem aprovados no vestibular e seu futuro no mercado de trabalho.

Espera-se promover maior inclusão dos alunos e professores da universidade envolvidos neste projeto e os demais cidadãos da cidade de São Carlos, representados pelos alunos e professores das escolas participantes. Deseja-se que, especialmente os alunos dessas escolas possam despertar interesse sobre matemática e estatística conhecendo os cursos oferecidos pelo ICMC-USP,

com o objetivo de terem melhores oportunidades no mercado de trabalho e, também, de contribuírem para o desenvolvimento científico e tecnológico do país.

Neste relatório estão detalhados os resultados da análise exploratória para a qual as atividades descritas na seção 2, foram conduzidas com os alunos do Ensino Médio na Escola Estadual Dr. Álvaro Guião. A seção 3 analisa os resultados obtidos. Na seção 4 estão descritos os próximos passos para completar o projeto e a seção 5 faz as considerações pertinentes ao trabalho até o momento.

## 2 Descrição de atividades

As atividades constantes neste projeto foram divididas em três etapas. As duas primeiras tem caráter explanatório e contendo a apresentação de seminários [3] e seções de discussão sobre os assuntos relacionados à vida acadêmica, carreira científica e mercado de trabalho.

A terceira etapa consiste da aplicação de um questionário estruturado para analisar o perfil dos alunos participantes do projeto. As questões abordadas estão relacionadas as fontes de informação disponíveis à esses alunos, os assuntos que mais os interessam, além dos cursos do ICMC e suas perspectivas sobre o mercado de trabalho dessas profissões.

Para examinar os dados antes da aplicação de técnicas estatísticas, é necessário realizar uma análise descritiva, para que possamos conhecer e resumir as informações. Com isso, é adquirido um conhecimento básico dos dados, o que facilita a identificação das relações existentes entre diversas variáveis e ajuda a responder as questões que estão sendo estudadas [4, 5].

Para impressão e conferência automática dos questionários foi aplicado o software *Auto Multiple Choice*, executado em plataforma *Linux*. A partir do sistema é possível ler automaticamente as respostas de múltipla escolha dos questionários escaneados em formato *pdf* [1].

Os dados obtidos foram devidamente tratados desconsiderando colunas com informações nulas ou inválidas. As análises foram construídas utilizando softwares de planilhas e também a linguagem *R*.

### 3 Análise dos Resultados

Os resultados obtidos da aplicação dos questionários foram divididos entre os alunos do primeiro e segundo ano do ensino médio da Escola Estadual Dr. Álvaro Guião.

As figuras 1, 2 e 3 descrevem o perfil geral dos alunos participantes da pesquisa. Pode-se observar que nos dois anos temos uma proporção de meninas levemente maior do que a de meninos, há uma homogeneidade na distribuição dos alunos entre os bairros, porém considerando os dois grupos, existe uma tendência para os bairros Santa Felícia e Vila Nery. Como já esperado, o primeiro ano tem o maior número de alunos com 14 anos e o segundo com 15 anos.

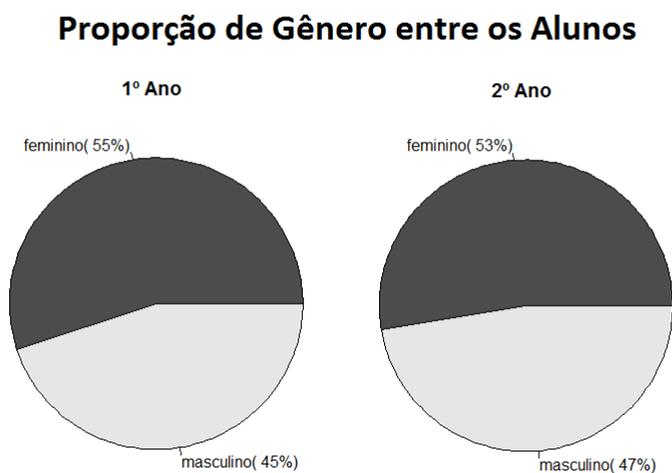


Figura 1: Proporção de gênero observada entre os alunos.

### Áreas da Cidade onde os Alunos Residem

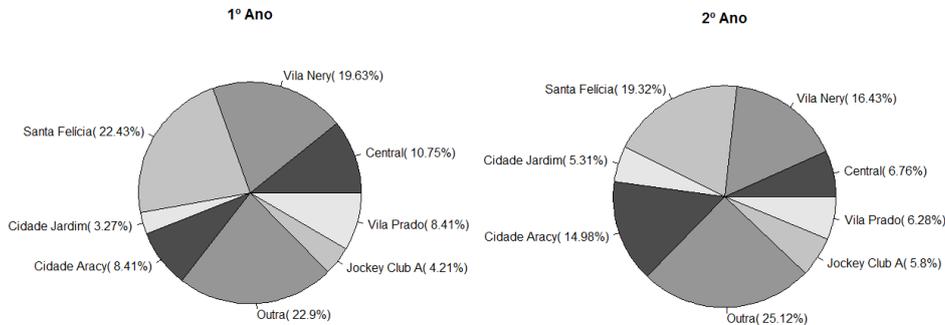


Figura 2: Proporção das residências dos alunos por áreas da cidade de São Carlos.

### Distribuição das Idades dos Alunos Participantes

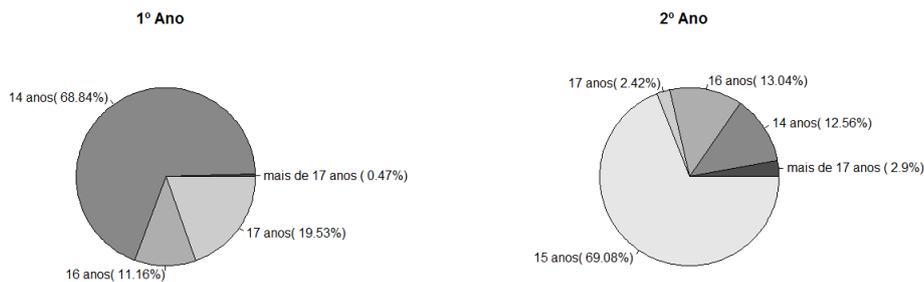


Figura 3: Idades dos alunos de acordo com seu ano letivo.

Há uma maior proporção de alunos do primeiro ano que afirmam gostar dos conteúdos de matemática, como ilustrado na figura 4, que mostra a proporção dos alunos em relação a sua afinidade com os conteúdos de exatas.

As figuras 5, 6 e 7 descrevem o conhecimento dos alunos em relação a existência da USP São Carlos e a disponibilidade dos cursos de exatas oferecidos gratuitamente pela universidade na cidade.

É notável que a grande maioria dos alunos das duas turmas afirma conhecer a USP São Carlos, porém com relação aos cursos de Matemática Aplicada e Estatística, esse conhecimento tem uma queda significativa. Nos dois anos letivos pode-se observar que há menos conhecimento dos alunos sobre a existência do curso de Estatística em comparação com o curso de Matemática Aplicada.

### Interesse dos Alunos pelos Conteúdos de Matemática

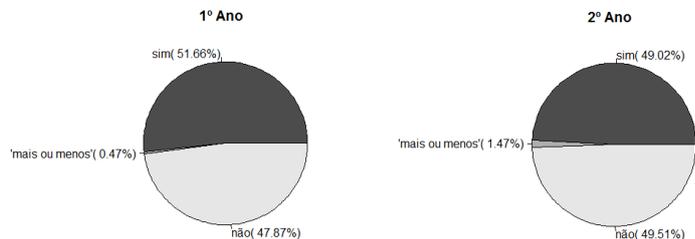


Figura 4: Proporção dos alunos em relação ao seu interesse pelos conteúdos de exatas.

### Proporção de Alunos que Afirma Conhecer a USP São Carlos

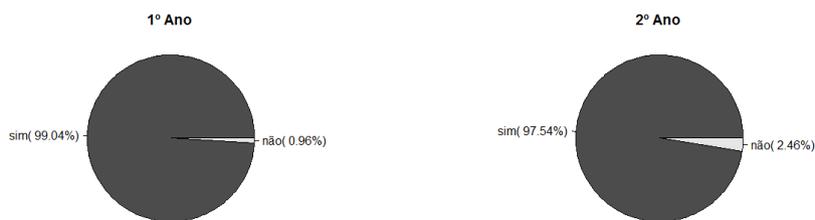


Figura 5: Conhecimento sobre a USP por parte dos alunos participantes.

### Conhecem o Curso de Matemática Aplicada da USP São Carlos

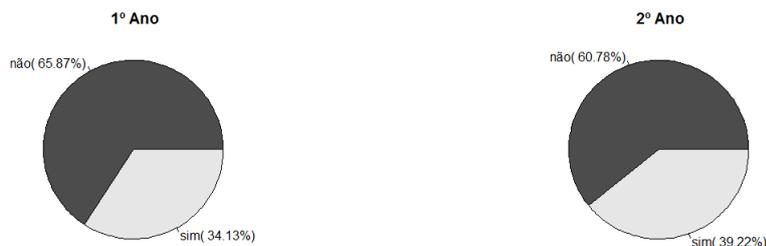


Figura 6: Conhecimento sobre o curso de Matemática Aplicada da USP.

As figuras 8 e 9 descrevem se os alunos dizem possuir informações sobre os exames pelos quais é possível ingressar na USP. A grande maioria conhece os dois processos seletivos, porém a FUVEST se mostra ser menos conhecida

### Conhecem o Curso de Estatística da USP São Carlos

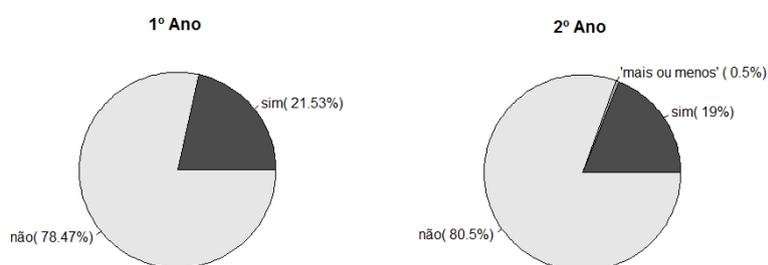


Figura 7: Conhecimento sobre o curso de Estatística Aplicada da USP.

pelos alunos do que o ENEM. Uma explicação para tal seria a falta de divulgação da prova nas escolas e na mídia em geral, o que não ocorre com o ENEM, que por ser realizado pelo MEC (Ministério da Educação) tem sido amplamente divulgada em diversas mídias, como redes sociais e TV aberta.

### Sabem o que é o ENEM

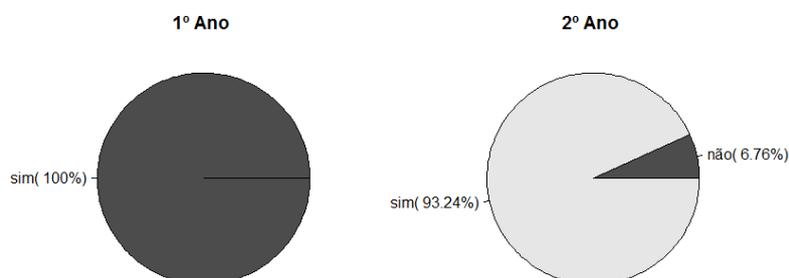


Figura 8: Alunos que possuem informações sobre o exame do ENEM.

A figura 10 descreve a pretensão dos alunos após terminarem o ensino médio. A grande maioria marcou a opção "fazer faculdade" no questionário e é notável que, entre os alunos do segundo ano, essa proporção é ainda maior pois já estão mais próximos da fase de escolha da profissão. Podemos ver que a segunda opção mais citada pelo alunos foi "curso técnico", pois muitos já estão cursando ou pretendem cursar.

### Sabem o que é a FUVEST

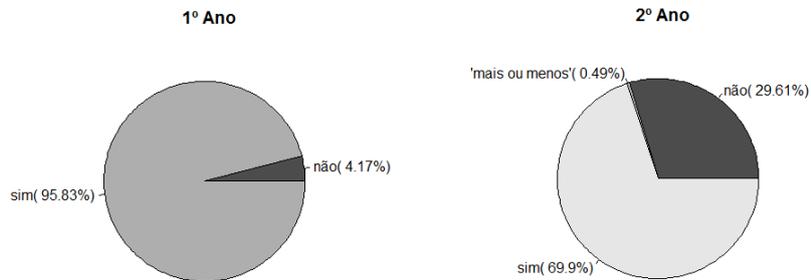


Figura 9: Alunos que possuem informações sobre o exame da FUVEST.

As figuras 11 e 12 mostram a interpretação dos alunos sobre as possíveis carreiras de um graduado em Matemática Aplicada. As opções mais citadas foram "universidades", "bancos" e "seguradoras" respectivamente. O fato dos alunos citarem as universidades como principal local de atuação de um Matemático Aplicado pode estar relacionado a existência de grandes universidades na cidade de São Carlos.

### O que os alunos pretendem fazer após o ensino médio?

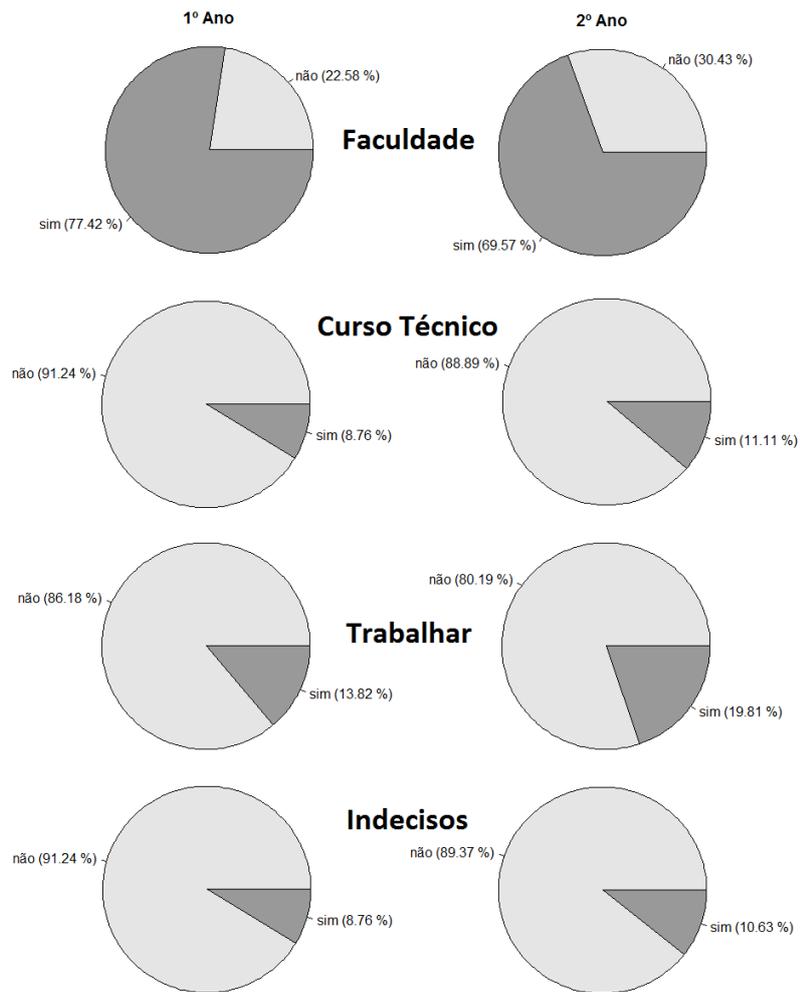


Figura 10: Pretensão dos alunos após a conclusão do ensino médio.

### Opções de mercado para matemática aplicada

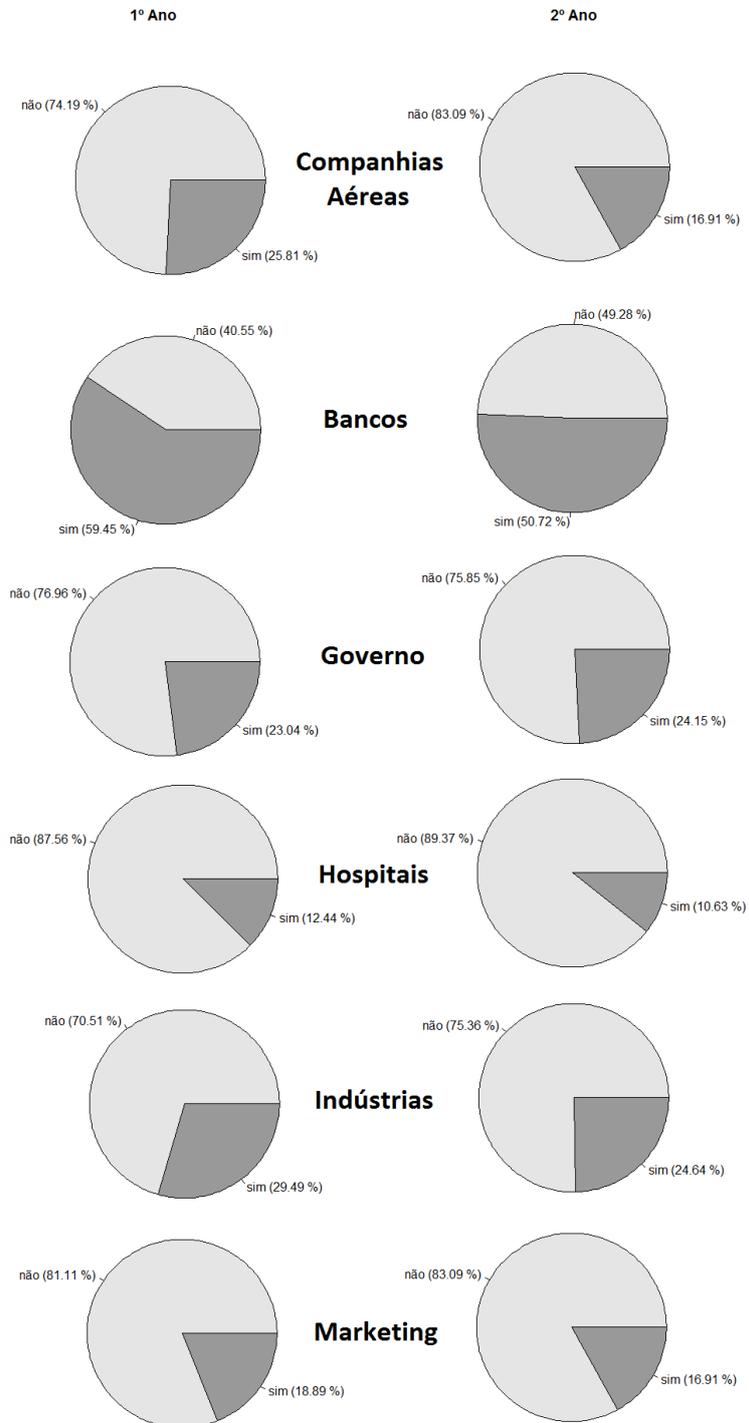


Figura 11: Possibilidades de emprego para graduados em Matemática Aplicada. (Parte 1)

### Opções de mercado para matemática aplicada

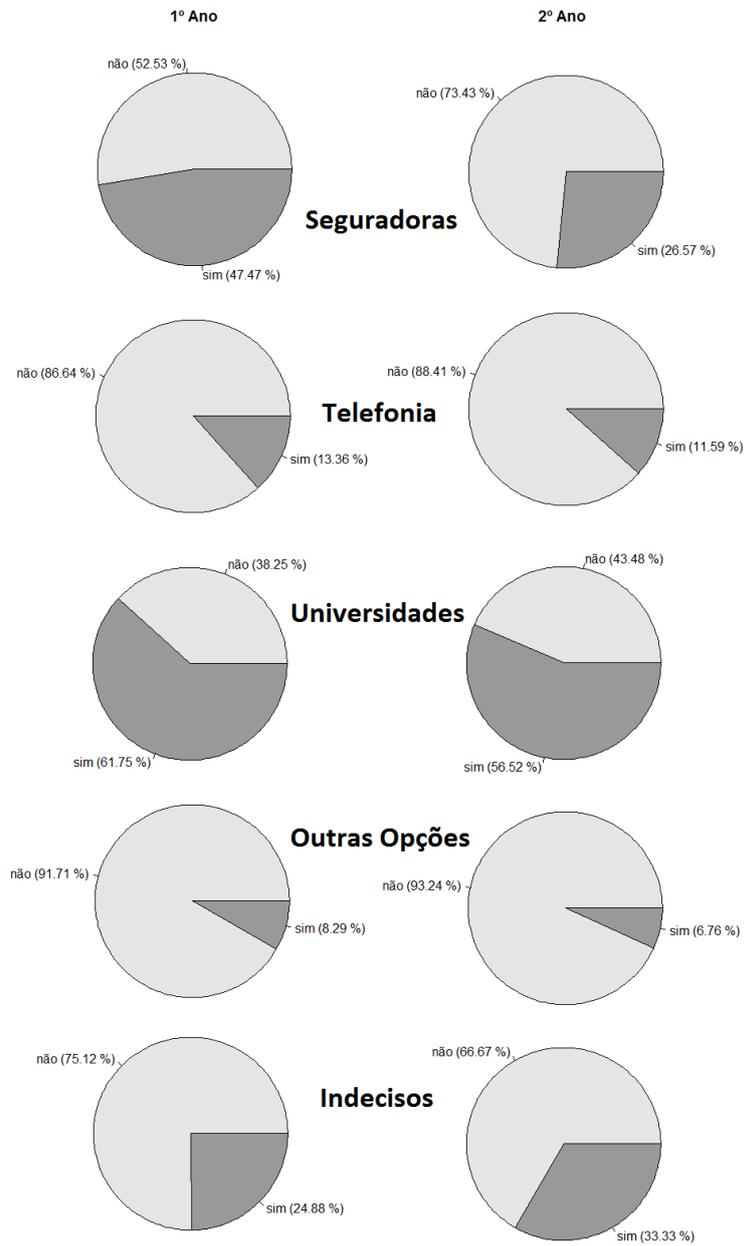
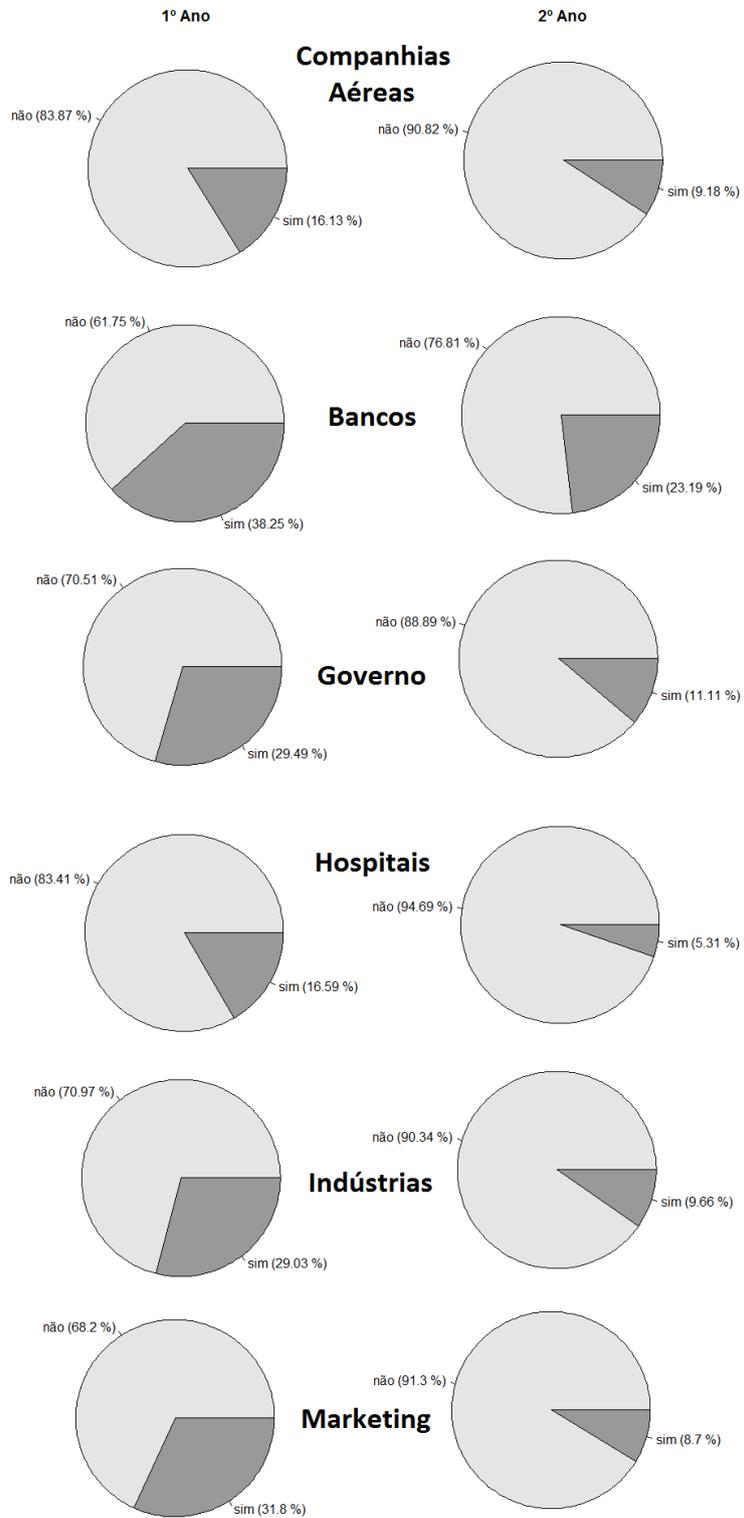


Figura 12: Possibilidades de emprego para graduados em Matemática Aplicada. (Parte 2)

### Opções para o mercado de estatística



12  
 Figura 13: Possibilidades de emprego para graduados em Estatística. (Parte 1)

### Opções para o mercado de estatística

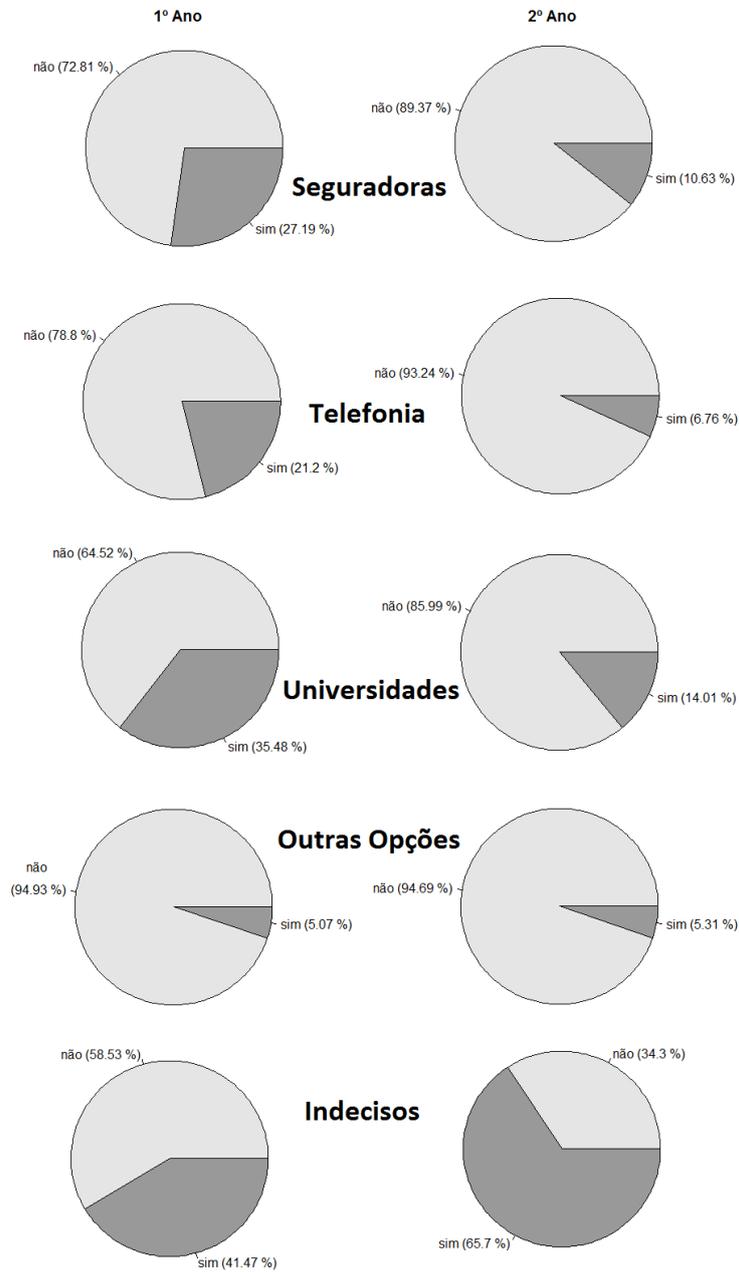


Figura 14: Possibilidades de emprego para graduados em Estatística. (Parte 2)

A avaliação dos participantes sobre a carreira de um graduado em Estatística está descrita nas figuras 13 e 14. Percebe-se o desconhecimento dos alunos em relação às oportunidades de trabalho para um estatístico, assim como evidenciado na figura 7, que mostra a falta de informação sobre a existência do curso de graduação em Estatística no campus da USP São Carlos.

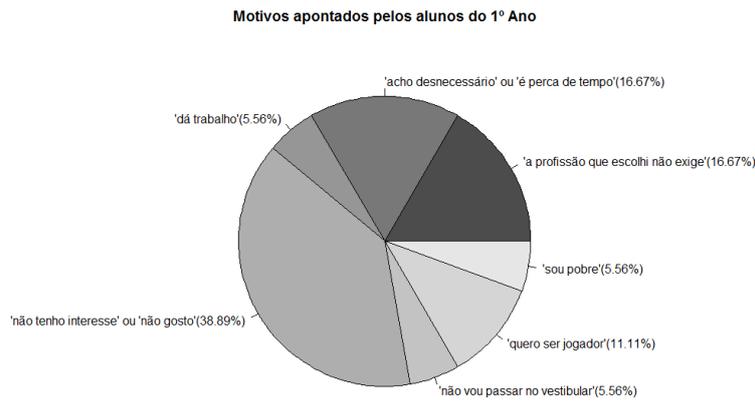


Figura 15: Motivos apontados pelos alunos do primeiro ano para justificar a falta de interesse em fazer faculdade.



Figura 16: Motivos apontados pelos alunos do segundo ano para justificar a falta de interesse em fazer faculdade.

Dos alunos que dizem não pretender fazer faculdade, o estudo buscava saber quais são os motivos dessa falta de interesse pelo ensino superior. Nas

figuras 15 e 16, temos as respostas dos alunos segundo seu ano letivo. Dentre os diversos motivos apontados para que esses jovens não tenham interesse em fazer faculdade, alguns deles chamam a atenção como por exemplo "sou pobre" e "não vou passar no vestibular", citados pelas turmas do primeiro ano e "não tenho dinheiro para pagar" citado pela turma do segundo ano. Tais colocações demonstram como a falta de informação ainda é muito presente nas escolas da rede pública.

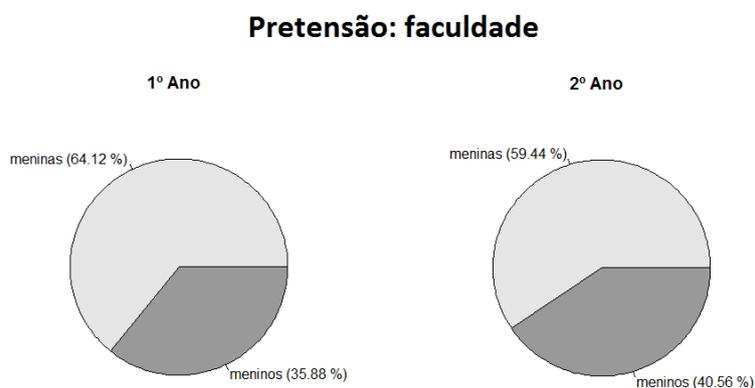


Figura 17: Alunos que pretendem fazer faculdade classificados por gênero.

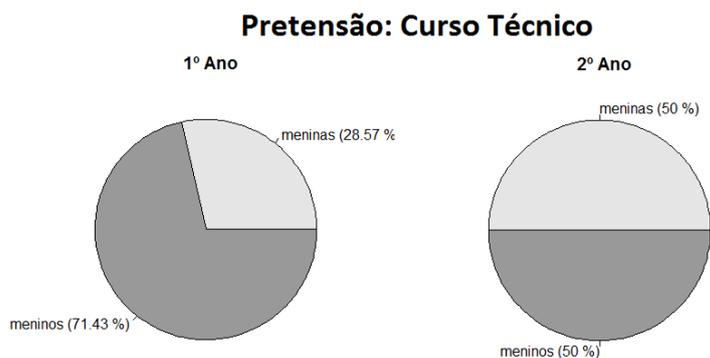


Figura 18: Alunos que pretendem fazer curso técnico classificados por gênero.

Após concluída a análise descritiva dos dados, procurou-se encontrar relações entre as variáveis de interesse. As figuras 17, 18 e 18 explicam os diferentes interesses dos alunos de acordo com o gênero. É possível notar

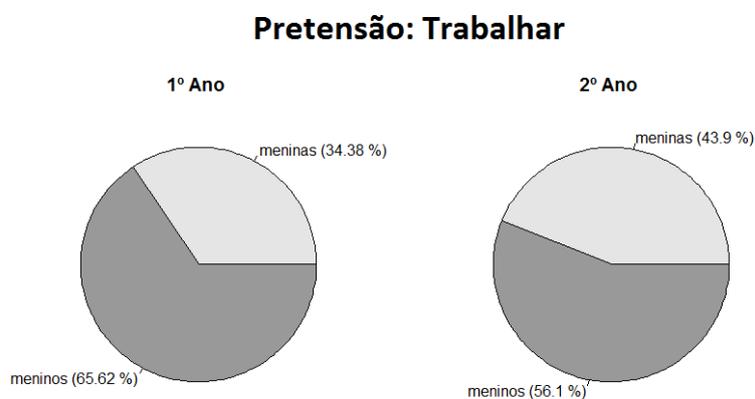


Figura 19: Alunos que pretendem trabalhar classificados por gênero.

que há uma preferência maior das meninas em fazer faculdade e dos meninos em trabalhar, nas duas turmas. Já entre os alunos que pretendem fazer curso técnico, as meninas do segundo ano estão mais propensas a escolher esse tipo de especialização do que as meninas do primeiro ano.

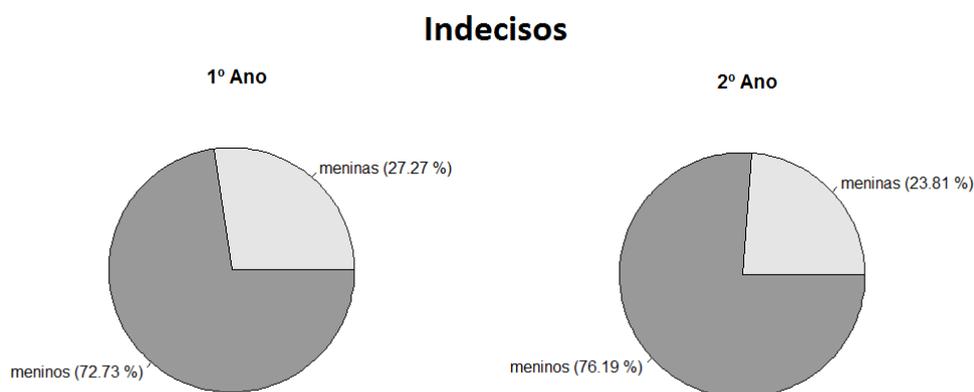


Figura 20: Alunos que ainda não decidiram classificados por gênero.

Entre os alunos que ainda não decidiram qual rumo tomar após a conclusão do Ensino Médio, de acordo com a figura 20, os meninos das duas séries estão mais indecisos do que as meninas.

Procura-se saber também se entre os alunos que dizem gostar de matemática há um alto índice de falta de informação a respeito dos cursos oferecidos pelo ICMC.

### Turmas do primeiro ano

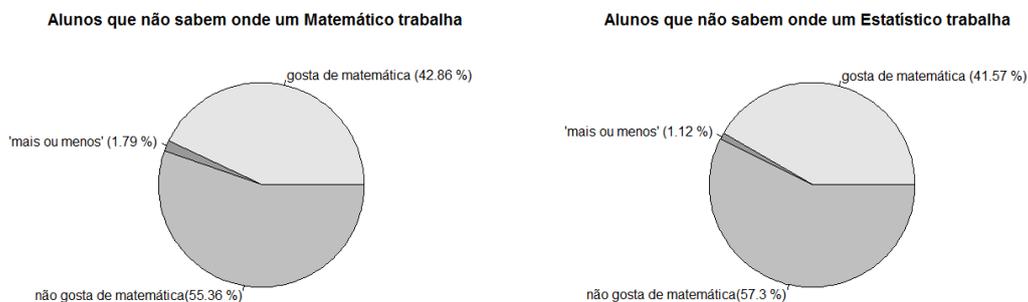


Figura 21: Alunos do primeiro ano que não sabem sobre as possíveis carreiras para graduados nos cursos pesquisados.

### Turmas do segundo ano

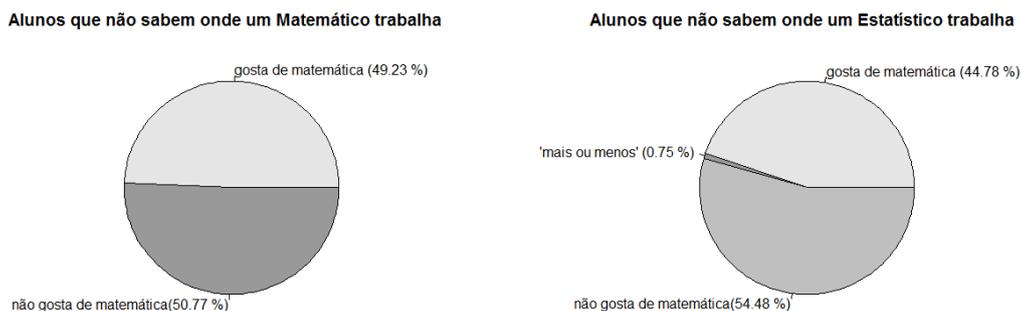


Figura 22: Alunos do segundo ano que não sabem sobre as possíveis carreiras para graduados nos cursos pesquisados.

A partir das figuras 21 e 22, observa-se entre os alunos que não conhecem os cursos de Matemática Aplicada e Estatística da USP São Carlos a falta de preferência por conteúdos de matemática. Entretanto, existe um alto índice de alunos que consideram gostar da disciplina, mas não tem informações a respeito desses cursos.

## 4 Próximos Passos

O projeto deve ter sequência com a realização de intervenções em outras escolas aumentando o número de participantes do estudo. Os seguintes passos são previstos no trabalho a ser realizado:

1. Realizar intervenções em outras escolas;
2. Analisar resultados obtidos;
3. Construção do relatório final.

O cronograma para conclusão do projeto é mostrado a seguir:

Tabela 1: Cronograma proposto de atividades

| <b>Etapa</b> | 02/2017 | 03/2017 | 04/2017 | 05/2017 | 06/2017 | 07/2017 |
|--------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| 1            | ■       | ■       | ■       |         |         |         |
| 2            |         | ■       | ■       | ■       | ■       |         |
| 3            |         |         |         | ■       | ■       | ■       |

## 5 Considerações Finais

A análise dos resultados permite traçar o perfil dos estudantes da rede pública de ensino para compreender quais são os interesses desses jovens e o grau de informação que eles tem acesso sobre a USP São Carlos e os cursos de Matemática Aplicada e Estatística oferecidos pelo campus. Os resultados apontam a falta de divulgação desses cursos.

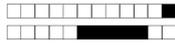
Novas intervenções devem ser realizadas em outras escolas para completar o projeto e para que generalizações possam ser feitas sobre as demais escolas de São Carlos.

## Referências

- [1] Alexis Bienvenüe. Auto multiple choice. Online, 2016. <http://home.gna.org/auto-qcm/>.
- [2] Elton Alisson Agência Fapesp. A grande massa de estudantes que concluem o ensino médio em escolas públicas não considera o ingresso em universidades públicas. Online, 2014. <https://www.revistaensinosuperior.gr.unicamp.br/reportagens/a-grande-massa-de-estudantes-que-concluem-o-ensino-medio-em-escolas-publicas-nao-considera-o-ingresso-em-universidades-publicas-diz-marcelo-knobel>.
- [3] ICMC. Seminário de coisas legais. Online, 2016. <http://legal.icmc.usp.br/doku.php>.
- [4] Paul L. Meyer. *Probabilidade Aplicações à Estatística*. Livros Técnicos e Científicos Editora, 1965.
- [5] Pedro A. Morettin and Wilton de O. Bussab. *Estatística Básica*. Editora Saraiva, 2004.
- [6] Paulo Saldana. Aluno da rede pública nem tenta vestibular da usp. Online, 2016. <http://www1.folha.uol.com.br/educacao/2016/11/1835998-aluno-da-rede-publica-nem-tenta-vestibular-da-usp.shtml>.

## **Anexos**

As páginas do questionário aplicado estão anexadas a seguir.



**QUESTIONÁRIO**

1 Qual seu sexo?

- feminino       masculino

2 Em qual região da cidade você mora? (Pense qual bairro dos citados abaixo fica mais próximo ao seu).

- Região do Cidade Aracy       Região do Vila Prado  
 Região Central       Região do Vila Nery  
 Região do Jockey Club A       Região do Santa Felícia  
 Região do Cidade Jardim       Outra:

3 Qual a sua idade?

- 14       15       16       17       mais do que 17

4 Você gosta de Matemática?

- sim       não

5 O que você pretende fazer ao concluir o Ensino Médio?

- trabalhar       curso técnico       faculdade  
 ainda não sei

6 Se não pretende fazer faculdade, por quê?



7 Você sabe o que é FUVEST?

- sim       não

8 Você sabe o que é ENEM?

- sim       não

Figura 23: Primeira folha do questionário aplicado.



9 Você sabe onde uma pessoa formada em Matemática Aplicada pode trabalhar? Assinale quantas alternativas quiser.

- não sei
- universidade
- agência de marketing e publicidade
- companhia aérea
- seguradora
- outro:
- hospital
- banco
- indústria
- companhia telefônica

10 Você sabe onde uma pessoa formada em Estatística pode trabalhar? Assinale quantas alternativas quiser.

- não sei
- universidade
- agência de marketing e publicidade
- companhia aérea
- seguradora
- outro:
- hospital
- banco
- indústria
- companhia telefônica

11 Você conhece ou já ouviu falar da USP São Carlos? Se não conhece e não ouviu falar, não precisa responder as próximas questões.

- sim
- não

12 Você conhece o curso de Matemática Aplicada da USP São Carlos?

- sim
- não

13 Você conhece o curso de Estatística da USP São Carlos?

- sim
- não

Agradecemos por colaborar!

Figura 24: Segunda folha do questionário aplicado.

# O modelo de Hopfield aplicado à redes complexas com o uso do pacote NetworkX para Python

VICTÓRIA MARIA GOMES VELAME<sup>1</sup>, CYNTHIA DE OLIVEIRA LAGE FERREIRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup> Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo

<sup>2</sup> Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação, Universidade de São Paulo

## Abstract

*The goal of this research is to study and apply the properties of convergence of discrete Hopfield model. Applications of these properties were studied in Barabási and Erdos-Renyi networks using the NetworkX package for Python. Applications were also developed for pattern recognition. The methodology used was the study and demonstration of the convergence properties theorems of Hopfield model by graph theory.*

**Keywords:** Hopfield, Python, NetworkX, Barabási, Erdos-Renyi.

## Resumo

*O objetivo desta pesquisa é estudar e aplicar as propriedades de convergência do modelo discreto de Hopfield em redes de Barabási e de Erdos-Renyi através do uso do pacote NetworkX para Python. Também foram realizadas aplicações para o reconhecimento de padrões. A metodologia utilizada foi o estudo e demonstração dos teoremas das propriedades de convergência para o modelo de Hopfield através da teoria de grafos.*

**Palavras-chave:** Hopfield, Python, NetworkX, Barabási, Erdos-Renyi.

## 1 Introdução

Redes neurais artificiais são técnicas computacionais que apresentam um modelo matemático inspirado na estrutura neural de organismos inteligentes, consistindo em uma rede de nós interconectados por arestas. Uma rede pode assumir qualquer estrutura, podendo ter nós ligados a todos os nós ou mesmo a nenhum [1]. As arestas as quais os nós são ligados podem ser atribuídos pesos, sendo estes de suma importância na estrutura de evolução da rede [2]. Uma rede pode evoluir um nó de cada vez, todos juntos ou ainda um conjunto de nós por vez. Esse comportamento definirá o seu modo de operação (serial, paralelo ou completamente paralelo). No modo completamente paralelo, todos os nós evoluem juntos, no modo

serial apenas um nó evolui por vez e no modo paralelo um conjunto de nós evolui por vez.

O modelo de redes estudado ao longo dessa pesquisa é o modelo conhecido como modelo de Hopfield, proposto por Jonh Hopfield em 1982 [3]. Este é um modelo de redes neurais artificiais recorrente em tempo discreto. Nele os nós assumem apenas dois estados, 1 ou -1, e a rede evoluirá para tentar chegar a um mínimo local [4] [5].

No modelo de Hopfield, uma rede neural de ordem  $n$  é definida pela matriz  $W$ , de ordem  $n \times n$ , onde os seus elementos representam os pesos das arestas, e pelo vetor  $\theta$ ,  $n$  dimensional, chamado de *threshold*.

Estudamos as propriedades de convergência do modelo de redes de Hopfield e aplicações desse modelo para o reconhecimento de

padrões, além do estudo desde modelo em topologias de redes complexas para verificar as suas propriedades de convergência. As propriedades de convergência utilizadas foram demonstradas através do uso da teoria de grafos e as aplicações foram implementadas em Python.

O estudo e a demonstração dos teoremas das propriedades de convergência das redes do modelo de Hopfield foram realizados com base no artigo de Bruck, *On the Convergence Properties of the Hopfield Model* [6].

Esta pesquisa baseou-se nos casos: sistema de matriz  $W$  simétrica de diagonal não negativa e modo de operação serial, sistema de matriz  $W$  simétrica, porém com modo de operação completamente paralelo e sistema de matriz  $W$  antissimétrica e modo de operação completamente paralelo. A demonstração destes resultados teve por base o uso de teoremas e conceitos da teoria de grafos, dentre eles, o conceito de corte mínimo.

Utilizou-se a linguagem Python e os pacotes *NetworkX*, *Numpy* e *Matplotlib* para aplicar o modelo de Hopfield em reconhecimento de padrões e testar as propriedades de convergência do modelo de Hopfield em redes complexas. Os modelos de redes complexas utilizados foram os modelos aleatórios de Barabási e Erdos-Renyi.

## 2 Metodologia

### 2.1 O modelo de Hopfield

Uma rede de Hopfield funciona exatamente como uma memória endereçada por conteúdo [3]. Ela é um sistema em tempo discreto e pode ser representada por um grafo com pesos, no qual cada aresta possui um peso e cada nó (neurônio) contém o seu estado atual [6].

O estado de um nó  $i$  no tempo  $t$  é denotado por  $v_i(t)$ . No modelo de Hopfield, cada nó pode assumir apenas dois estados 1 ou  $-1$ , os quais indicam estado ativo e estado inativo, respectivamente. Um padrão pode ser descrito como um vetor de estados, onde o tamanho do vetor é igual ao número de nós da rede, que, por conseguinte, é a ordem da rede [6], [3].

O estado da rede no tempo  $t$  é, então, representado pelo vetor  $V(t)$ ,  $n$  dimensional, em que  $V(t) = (v_1(t), v_2(t), v_3(t), \dots, v_n(t))$ .

No modelo de Hopfield, a dinâmica da rede (atualização dos nós) é calculada pela função:

$$v_i(t+1) = \text{sgn} \left( \sum_{j=1}^n w_{ij} \times v_j(t) - \theta_i \right) \quad (1)$$

A equação acima pode ser escrita como:

$$V(t+1) = \text{sgn}(W.V(t) - \theta) \quad (2)$$

Lembrando que  $\text{sgn}(x)$  é a função matemática *signum*, definida como:

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \geq 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

O próximo estado da rede,  $V(t+1)$ , é obtido com a realização do cálculo da equação de atualização dos nós para um subconjunto de nós da rede. Este subconjunto é denominado  $S$ .

Os modos de operação são determinados pelo modo no qual o conjunto  $S$  é selecionado a cada intervalo de tempo. Assim sendo, se apenas um nó é alterado a cada instante de tempo, isto é, se  $|S| = 1$ , a rede opera no modo serial; se todos os nós são alterados no mesmo instante  $t$ ,  $|S| = n$ , a rede opera no modo completamente paralelo. Quando um conjunto de nós é alterado,  $1 < |S| < n$ , então tem-se modo de operação paralelo.

A rede estará no estado de equilíbrio estável quando esta não sofrer mais alteração no seu estado, ou seja quando  $V(t+1) = V(t)$ . Assim sendo, para um estado estável tem-se a equação  $V(t) = \text{sgn}(W.V(t) - \theta)$ . O conjunto de estados estáveis de equilíbrio de uma rede  $N$  será denotado por  $M_n$  e o ciclo de uma rede será descrito por um conjunto com estados distintos que se repetem na mesma sequência indefinidamente.

Se considerarmos a rede  $N_1$  descrita por  $N_1 = (W, \theta)$ , sendo  $W$  uma matriz simétrica da forma:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

E  $\theta$  um vetor nulo:

$$\theta = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

temos que a rede  $N_1$  é de ordem 2. Para calcular seus estados de equilíbrio utiliza-se o seguinte algoritmo.

1.  $V(t) = \text{sgn}(W.V(t) - \theta)$ ;
2. Fazendo  $V(t) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ , onde  $a, b \in \{-1, 1\}$ ;
3. De 2 em 1,  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \text{sgn} \left( \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \right)$ ;
4. Desenvolvendo 3,  $a = \text{sgn}(-b)$  e  $b = \text{sgn}(-a)$ . Há, portanto, duas soluções  $\{(1, -1), (-1, 1)\}$ .

Observe que: se inicialmente  $(a, b) = (1, 1)$  ou  $(a, b) = (-1, -1)$  e o sistema operar em completamente paralelo, ele nunca irá convergir para o estado de equilíbrio estável, pois ficará no ciclo  $\{(1, 1), (-1, -1)\}$ . Porém, se o sistema operar no modo série, ele sempre convergirá, pois caso a entrada seja  $(1, 1)$  ou  $(-1, -1)$  seu próximo estado será, respectivamente,  $(-1, 1)$  ou  $(1, -1)$ , e com estes estados de entrada o sistema converge.

Considerando a rede  $N_2$  descrita por  $(W, \theta)$ , onde  $\theta$  é um vetor nulo de duas dimensões e  $W$  uma matriz antissimétrica da forma:

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Temos que a rede  $N_2$  também é de ordem 2, e utilizando o mesmo algoritmo anterior para calcular seus estados de equilíbrio, teremos:  $a = \text{sgn}(b)$  e  $b = \text{sgn}(-a)$ . Portanto, a rede  $N_2$  não apresenta estado de equilíbrio, pois ela entrará num ciclo para qualquer modo de operação do sistema e vetor de entrada.

Como, no modelo de Hopfield, o espaço das variáveis de estados é finito, então a rede sempre entrará num estado estável ou num ciclo infinito. Nos exemplos anteriores foi possível visualizar este fato. Neste modelo as propriedades de convergência dependem apenas de  $W$  e do modo de operação da rede, pois, como foi visto, redes com o mesmo  $W$  e  $\theta$  podem apresentar comportamento de convergência distintos a depender do seu modo de operação.

Consideraremos três casos para o qual um sistema dinâmico discreto pode convergir. Caso o sistema apresente a matriz  $W$  simétrica de diagonal não negativa e opere no modo serial, ele sempre irá convergir para o estado de equilíbrio estável; caso a matriz  $W$  seja simétrica e o modo de operação seja completamente paralelo ele irá

convergir para um ciclo de comprimento menor ou igual a 2; caso a matriz  $W$  seja antissimétrica e o modo de operação seja completamente paralelo, o sistema convergirá para um ciclo de comprimento 4. [6]

## 2.2 Conceitos de grafos

As definições a seguir são a base dos conceitos de grafos necessários para a demonstração dos teoremas das propriedades convergência da rede de Hopfield. Eles foram utilizados para correlacionar grafos e redes, corte mínimo e mínimo local de energia.

**Definição de grafo:** Um grafo é definido por  $G = (V, E)$ , onde  $V$  é o conjunto dos vértices e  $E$  o conjunto das arestas. Um grafo pode ser orientado (chamado de dígrafo) ou não orientado. Ele pode, também, ter ou não pesos atribuídos às arestas. O peso das arestas, caso haja, é dado por uma matriz  $W$  de dimensão  $n \times n$ , sendo  $n$  o número de nós [7].

**Definição de corte:** Um corte em um grafo conexo  $G = (V, E)$  é um conjunto de arestas  $S$  com as seguintes propriedades:

1. Ao removermos todas as arestas de  $S$  do grafo  $G$ , desconectamos  $G$ .
2. A remoção do grafo  $G$  de algumas arestas do conjunto  $S$  não desconecta  $G$ .

**Definição de corte mínimo:** Um corte mínimo em um grafo conexo  $G = (V, E)$  é definido como sendo o corte que resulta no valor mínimo da soma dos pesos das arestas que compõem o corte.

**Definição de grafo bipartido ou bigrafo:** Um bigrafo é definido como um grafo cujos vértices podem ser divididos em dois conjuntos disjuntos  $U$  e  $V$  tais que toda aresta conecta um vértice em  $U$  a um vértice em  $V$ , ou seja, não há ligações entre vértices do mesmo conjunto. Desse modo,  $U$  e  $V$  são conjuntos independentes.

Um algoritmo de corte mínimo em grafos não orientados baseado no conceito de árvore de extensão pode ser encontrado em [9]. Uma árvore de extensão é um subgrafo do grafo em questão e que contém todos os seus vértices.

## 2.3 Principais Resultados Usados

Os teoremas e lemas apresentados nesta seção foram utilizados como metodologia para a demonstração das propriedades de convergência da rede de Hopfield. Eles fazem a correlação entre grafos e redes, e entre os modos de operação serial e paralelo. Além disso, eles utilizam os conceitos definidos nas subseções anteriores.

**Teorema 1:** Seja  $G = (V, E)$  um grafo com pesos e não orientado e seja  $W$  a matriz de pesos de  $G$ . Então, encontrar um corte mínimo em  $G$  é equivalente a encontrar um máximo da função  $Q_G(X)$ , onde  $X$  é um vetor  $n$  dimensional cujos elementos  $x_i \in \{-1, 1\}$ , em que:

$$Q_G(X) \stackrel{def}{=} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_{ij} x_i x_j$$

**Teorema 2:** Seja uma rede  $N = (W, \theta)$  com  $W$  sendo uma matriz  $n \times n$  simétrica de diagonal nula. Seja um grafo  $G$ , com pesos, com  $n+1$  vértices e cuja matriz de peso é  $W_G$ :

$$W_G = \begin{pmatrix} W & \theta \\ \theta^T & 0 \end{pmatrix}$$

Encontrar um corte mínimo do grafo  $G$  é equivalente à encontrar um mínimo da energia da rede  $N$ , sendo este ponto de mínimo de energia da rede  $N$  o seu estado de equilíbrio estável.

**Lema 1:** Seja uma rede  $N = (W, \theta)$  com  $W$  sendo uma matriz simétrica  $n \times n$  e  $\hat{N} = (\hat{W}, \hat{\theta})$  um grafo bipartido, onde  $\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & W \\ W & 0 \end{pmatrix}$  e  $\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \theta \\ \theta \end{pmatrix}$ .

a) Para  $W$  com diagonal não negativa, se a rede  $N$  operar em modo serial, então existe um modo de operação serial equivalente para  $\hat{N}$ .

b) Existe um modo de operação serial em  $N$  equivalente a um modo operação completamente paralelo em  $\hat{N}$ .

**Lema 2:** Seja uma rede neural  $N = (W, \theta)$ , onde  $W$  é uma matriz antissimétrica com diagonal nula e  $\theta$  é um vetor nulo. Considere que  $W \times V$  não tem zeros para todo  $V = \{(v_1, v_2, \dots, v_n) / v_i \in \{1, -1\}, i = 1, 2, 3, \dots, n\}$ .

Seja a rede neural  $\hat{N} = (\hat{W}, \hat{\theta})$  obtida da rede  $N$ , com  $\hat{\theta} = 0$  e

$$\hat{W} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & W \\ 0 & 0 & W & 0 \\ 0 & -W & 0 & 0 \\ -W & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Existe um modo de operação serial em  $\hat{N}$  o qual é equivalente a rede  $N$  operando no modo completamente paralelo.

## 3 Resultados

Seguindo a metodologia citada na seção 2 e utilizando os teoremas e lemas da subseção 2.3 pode-se demonstrar e estudar das propriedades de convergência da rede de Hopfield.

### 3.1 Propriedades de Convergência

Os teoremas a seguir descrevem as propriedades de convergência do modelo de Hopfield. Como já foi dito, a convergência dependerá da matriz  $W$  e do modo de operação da rede.

**Teorema 3:** Seja uma rede  $N = (W, \theta)$  com  $\theta$  vetor nulo e  $W$  uma matriz simétrica com diagonal nula. Se o modo de operação da rede  $N$  é serial, então a rede sempre convergirá para um estado estável.

**Prova:** Segundo o teorema 2, temos que o estado estável da rede  $N$  ocorrerá quando o corte mínimo do grafo correspondente for encontrado e este separar a rede em dois conjuntos disjuntos: um de vértices com estado -1 e o outro de vértices com estado 1. Podemos utilizar o algoritmo descrito acima para encontrar o corte mínimo do grafo. Como este algoritmo opera em um vértice por vez, ele é equivalente ao modo de operação serial.

**Teorema 4:** Seja uma rede  $N = (W, \theta)$ ,

1. Se a rede  $N$  com matriz  $W$  simétrica e diagonal não negativa opera em modo serial, então sua rede sempre convergirá para um estado estável;

2. Se a rede  $N$  com matriz  $W$  simétrica opera em modo completamente paralelo, então sua rede sempre convergirá para um estado estável ou ciclo de comprimento 2;
3. Se a rede  $N$  com matriz  $W$  antissimétrica com diagonal nula e matriz de *threshold* nula opera em modo completamente paralelo, então sua rede sempre convergirá para um ciclo de comprimento 4;

**Prova:** De acordo com o lema 1 parte a) dada uma rede operando em modo serial com matriz  $W$  simétrica e diagonal não nula, existe uma rede equivalente operando em modo serial com  $W$  com diagonal não negativa. No teorema 3 foi provado que toda rede  $N$  com matriz  $W$  simétrica de diagonal nula e matriz de *threshold* nula converge para um estado estável. E, ainda, segundo o teorema 2 uma rede  $N$  pode ser escrita como um grafo com um nó a mais para representar a sua matriz de *threshold*. Assim sendo, com a união de todas estas provas demonstra-se o item 1.

Segundo o lema 1 parte b) para toda rede  $N$  operando em modo completamente paralelo existe uma rede  $\hat{N}$  equivalente em modo serial com matriz  $\hat{W}$  simétrica e de diagonal nula. Assim sendo, do teorema 3 temos que a rede  $\hat{N}$  irá convergir para um estado estável, portanto caso o subconjunto  $P_1$  dessa rede seja igual ao subconjunto  $P_2$  a rede  $N$  convergirá para um estado estável e, caso estes subconjuntos sejam distintos, ela convergirá para um ciclo de comprimento 2, o que prova o item 2.

Segundo o lema 2 para toda rede  $N$  com matriz  $W$  antissimétrica operando em modo paralelo, existe uma rede  $\hat{N}$  equivalente que opera em modo serial, com  $\hat{W}$  sendo uma matriz simétrica de diagonal nula. Neste caso, a rede  $\hat{N}$  pelo teorema 3 convergirá para um estado estável e, como foi mostrado no lema 2, terá estado  $\hat{V} = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ , tal que  $U_1 = -U_2$  e  $U_3 = -U_4$ . Em um estado estável devido a estrutura da matriz  $\hat{W}$  tem-se as equações da rede  $\hat{N}$ :  $U_1 = \text{sgn}(WU_4)$  e  $U_4 = \text{sgn}(-WU_1)$ , então  $U_1 \neq U_4$  e  $U_1 \neq -U_4$ , pois estas igualdades levam a contradições nas equações anteriores. Desse modo, pode-se verificar que todos os subconjuntos  $U_1, U_2, U_3, U_4$  são distintos, o que implica no fato da rede

$N$  convergir para um ciclo de comprimento 4, provando o item 3.  $\square$

Pode-se notar que todas as proposições que compõem o teorema 4 recorrem ao teorema 3. Para isso ocorrem reduções com o uso de bigrafos, pois estes geram grafos com subconjuntos independentes, o que faz a equivalência entre uma rede operando em modo serial com outra rede em modo paralelo e vice-versa.

### 3.2 Aplicação para reconhecimento de padrão

Redes de Hopfield são utilizadas para reconhecer padrões memorizados. Ou seja, elas são treinadas para recuperar a partir de uma entrada distorcida o estado memorizado de maior semelhança com a entrada. O processo de treinamento da rede consiste em diminuir a energia dos estados que a rede deve memorizar. De modo que, a rede estará devidamente treinada quando a energia dos estados memorizados forem mínimos locais.

Existem vários algoritmos de aprendizagem que podem ser usados para armazenar informação na memória da rede de Hopfield, ou seja, treiná-la. O Hebbiana é um processo de aprendizagem baseado na teoria de Hebb, 1949 [3]. Para treinar a rede de Hopfield por esse método, temos a equação:

$$w_{ij} = \frac{1}{N} \sum_{p=1}^N I_i^p I_j^p$$

onde  $w_{ij}$  são os termos da matriz de pesos  $W$  da rede,  $N$  é o número de padrões a ser armazenado e  $I_i^p$  é o  $i$ -ésimo termo do vetor padrão  $p$ . A divisão por  $N$  serve para normalizar a matriz de pesos.

Desenvolvemos essa aplicação, memorização de padrões, em Python com o uso dos pacotes *Numpy* e *Matplotlib*. Optamos pelo reconhecimento de letras com ruído utilizando o aprendizado Hebbiana. Estas letras foram representadas em 25 pixels, num quadrado 5 por 5. Escolhidas as letras a serem memorizadas, foi feito o treinamento da rede. Primeiramente foi construída uma rede de 25 nós, cada nó representando um pixel, com  $W = 0$ , então a rede

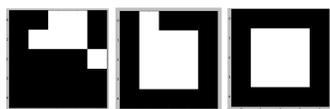
foi treinada para memorizar as letras escolhidas como padrões.

A grande limitação da rede de Hopfield é a pequena capacidade de memória, sendo ela de  $P_{max} = 0,139N$ , onde  $N$  é o número de nós da rede e  $P_{mx}$  é o número máximo de padrões que poderá ser memorizado.

Na implementação realizada a rede tem 25 nós, logo o máximo que ela poderia memorizar segundo a equação acima é 3,475 padrões, ou seja, apenas 3 padrões. Devido a essa limitação escolhemos as letras ‘A’, ‘O’ e ‘U’ para serem memorizadas. No apêndice A.1 encontra-se o programa em Python com esta implementação.

Nas figuras 1, 2 e 3 há exemplos do reconhecimento de padrões gerados por esse programa em Python. Nessas figuras a primeira imagem é a entrada inicial ( $V(0)$ ) e as imagens subsequentes são a resposta da rede nas iterações subsequentes. Nota-se que a rede reconhece a letra memorizada que mais se aproxima da entrada e converge para ela. A rede demora mais para convergir a depender da quantidade de ruído, contudo, no geral, ela se mostrou bem rápida, visto que, em média duas interações já eram suficientes para o reconhecer a letra e permanecer neste estado estável.

De acordo com o teorema 3, a convergência a algum estado de mínimo de energia é sempre garantida, uma vez que a rede opera em modo serial e tem matriz  $W$  simétrica com diagonal nula. Porém, observamos que ela pode convergir para algum estado diferente do que foi memorizado, como na figura 4.



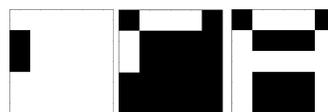
**Figura 1:** Imagem de reconhecimento da letra memorizada ‘O’



**Figura 2:** Imagem de reconhecimento da letra memorizada ‘A’



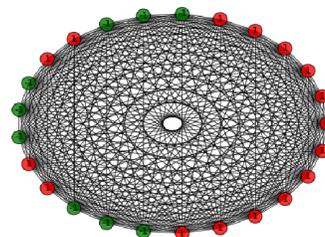
**Figura 3:** Imagem de reconhecimento da letra memorizada ‘U’



**Figura 4:** Imagem convergiu para letra não memorizada

Após muitos testes realizados com o programa em Python notou-se que a rede sempre convergia para uma das letras memorizadas ou para o negativo de alguma delas, como aconteceu no exemplo da figura 4. O negativo só ocorreu em casos que a entrada se distanciava bastante de todas as letras memorizadas.

Um exemplo final do estado da rede ao reconhecer a letra ‘O’ se encontra na figura 5, nela não foi possível representar os pesos das arestas pelo fato de ser visualmente inviável. Nota-se que a rede de Hopfield é circular, ou seja, todos os nós estão ligados entre si. Esta é uma propriedade topológica deste modelo de rede neural.



**Figura 5:** Rede utilizada para reconhecer padrão da letra ‘O’

### 3.3 Aplicação em Redes complexas

A próxima aplicação realizada foi o uso do modelo de Hopfield e suas propriedades de convergência em redes complexas. Estudamos os modelos de Erdos-Renyi e de Barabási [10].

Para a implementação desses modelos, utilizou-se linguagem Python em conjunto com os pacotes *NetworkX*, *Numpy* e *Matplotlib*.

Uma rede de Erdos-Renyi é o modelo mais básico de rede complexa. Este modelo é definido pelo número de vértices  $n$  e uma probabilidade  $p$  de conectar cada par de vértices. Em um modelo de Erdos-Renyi o número médio de conexões de cada vértice  $\langle k \rangle$  é dado por

$$\langle k \rangle = p(n - 1).$$

Para este modelo, a distribuição dos graus,  $P(k)$  é uma distribuição de Poisson.

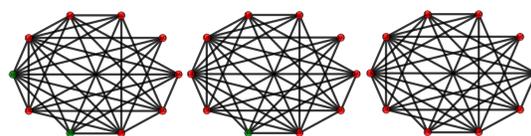
Uma rede de Barabási é caracterizada por possuir a distribuição dos graus  $P(k)$  obedecendo a uma lei de potências  $k^{-\gamma}$ , para  $k$  grande. Estas redes são também chamadas livre de escala. Uma característica deste tipo de rede é a existência de *hubs*, isto é, vértices que estão conectados a uma fração significativa do número total de arestas da rede. Este tipo de rede é gerada começando com um número  $n_0$  de vértices e a partir daí, a rede cresce com a adição de novos vértices, de modo que para cada novo vértice,  $m$  novas arestas serão inseridas entre este novo vértice e alguns dos vértices já existentes. Tais vértices são escolhidos de modo a privilegiar os vértices que possuem um número maior de conexões. Ou seja, a probabilidade de um novo vértice  $i$  se conectar a um vértice existente  $j$  é proporcional ao número de conexões de  $j$ .

Tais modelos foram gerados através do pacote *NetworkX* e a partir deles foram estudadas as propriedades de convergência do modelo de Hopfield demonstradas nas seções anteriores. Assim, um estado inicial da rede era determinado de forma aleatória e esta operava em modo serial ou paralelo a fim de verificarmos sua convergência. Redes complexas do modelo de Erdos-Renyi e Barabási são redes unidirecionais e sem auto-conexões, de modo que sua matriz de pesos é simétrica e de diagonal nula. Com isso, o item 3 do teorema 4 não pode ser aplicado a estes modelos.

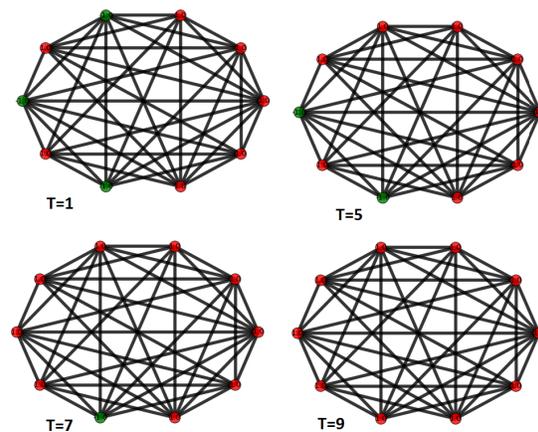
Nas figuras 6, 7 e 8 há os resultados da implementação realizada em Python do modelo de Hopfield em redes complexas de Erdos-Renyi. Todas essas implementações foram realizadas para rede de Erdos-Renyi com 10 nós e pro-

habilidade de ligação  $p = 0,8$ , variando-se o estado inicial e o modo de operação da rede. No apêndice A.2 encontra-se o programa em Python com esta implementação.

Na figura 6, a primeira imagem é o estado inicial da rede e a última é o estado para o qual ela convergiu. A rede opera no modo serial neste exemplo, portanto deveria convergir sempre, não importando o estado inicial. Várias demonstrações foram realizadas para comprovar e verificar essa propriedade. Em todas as simulações realizadas em modo serial, para este modelo de rede, ela convergiu para um estado estável. Notou-se ainda que, para este caso, os estados estáveis para os quais a rede convergia eram com todos os nós 1 ou com todos -1, assim, quanto mais nós com estados semelhantes o vetor de entrada apresentava, mais rapidamente a rede convergia.



**Figura 6:** Modelo de Erdos-Renyi com  $n=10$ ,  $p=0,8$  e modo serial

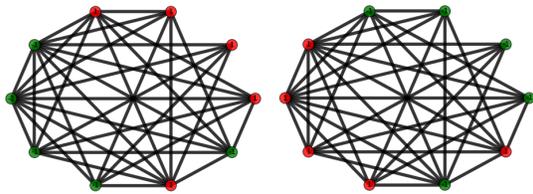


**Figura 7:** Modelo de Erdos-Renyi com  $n=10$ ,  $p=0,8$  e modo serial

Na figura 7, também em modo de operação serial, sob cada imagem há o tempo discreto para o qual a convergência ocorreu, sendo o estado inicial com tempo  $T=1$ . Os tempos que

não estão na imagem não sofreram alteração de estado e, por isso, foram cortadas da imagem. A última imagem representa o estado para o qual a rede convergiu, ou seja para todos os tempos subsequentes ( $T > 9$ ) a rede permaneceu inalterada. Note que para o caso serial cada iteração evolui apenas um nó, desse modo, a rede convergirá somente quando o estado se manter constante após todos os nós pertencentes ao conjunto  $S$  terem evoluído.

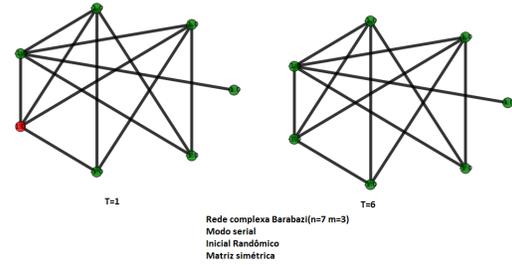
Na figura 8, a rede foi colocada em modo de operação completamente paralelo, resultando em ciclo de tamanho 2. As imagens desta figura representam esses dois estados do ciclo. Desse modo, o item 2 do teorema 4 também foi verificado para o modelo de Erdos-Renyi.



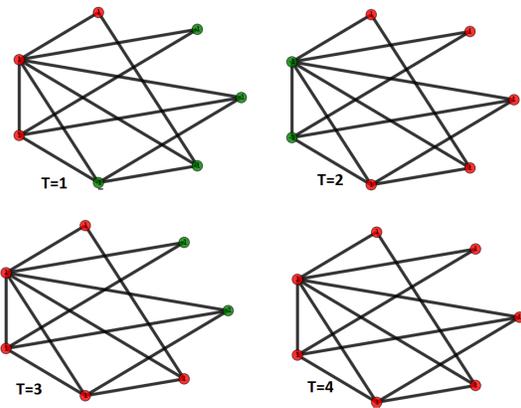
**Figura 8:** Modelo de Erdos-Renyi com  $n=10$ ,  $p=0,8$  e modo completamente paralelo

Nas figuras 9, 11 e 10 há os resultados da implementação realizada em Python do modelo de Hopfield em redes complexas de Barabási. Todas essas implementações foram realizadas para rede de Barabási com 7 nós e  $m = 3$ .

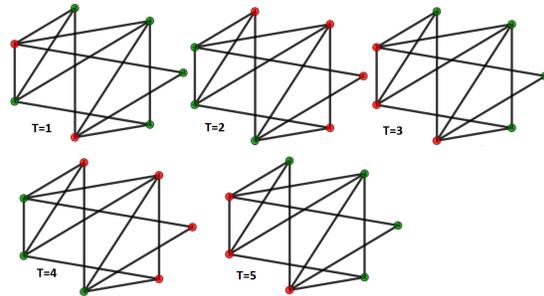
Na figura 9, a rede está em modo de operação serial e, portanto, a rede converge para um estado estável, de acordo com o teorema 3. Nas figuras 11 e 10 o modo de operação é o completamente paralelo. Na figura 10 opera-se no modo paralelo e observa-se a convergência a um estado estável, enquanto que na figura 11 observa-se a convergência a um ciclo de ordem 2. Desse modo, as propriedades estudadas foram validadas, sendo que no modo serial a rede sempre convergia a um estado estável e no modo completamente paralelo convergia a um ciclo de tamanho menor ou igual a 2.



**Figura 9:** Modelo de Barabási com  $n=7$ ,  $m=3$  e modo serial



**Figura 10:** Modelo de Barabási com  $n=7$ ,  $m=3$  e modo completamente paralelo em estado estável



**Figura 11:** Modelo de Barabási com  $n=7$ ,  $m=3$  e modo completamente paralelo em ciclo de tamanho 2

## 4 Conclusão

Este artigo apresentou um estudo dos teoremas de convergência para o modelo de rede

neural de Hopfield fazendo uso da teoria de grafos.

Foi realizada uma aplicação do modelo de Hopfield para o reconhecimento de padrões. Nesta etapa foi analisada sua capacidade de armazenamento e velocidade de reconhecimento. Concluiu-se que, embora seja um modelo de fácil implementação, baixo custo computacional e de rápida convergência, tem como limitação a baixa capacidade de memória, por isso atualmente outros modelos são mais indicados para esta aplicação.

Por fim, as propriedades de convergência do modelo de rede neural proposto por Hopfield foram aplicadas em redes complexas. Essas aplicações foram implementadas em Python. Os modelos de redes complexas utilizados para isso foram os de Erdos-Renyi e de Barabási. Nessa aplicação, as propriedades foram visualizadas e testadas, observando-se que elas estavam de acordo com os teoremas estudados.

## 5 Agradecimentos

Victória Maria Gomes Velame agradece ao CNPq pela bolsa de estudos concedida para a realização desta pesquisa. Cynthia de Oliveira Lage Ferreira agradece à FAPESP pelo auxílio financeiro concedido (2013/13330-9).

## Referências

- [1] Rojas R., *Neural Networks*, Springer, 1996.
- [2] Kriesel D., *A Brief Introduction to Neural Networks*, 2007.
- [3] Mendes, J., *Redes Neurais Artificiais: Rede Hopfield e Redes Estocásticas*, UFF, 2003.
- [4] Galor O., *Discrete Dynamical Systems*, Springer, 2007.
- [5] Devaney R. L., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison Wesley Publishing company, 1989.
- [6] Bruck J., *On the convergence properties of the Hopfield model*, Proceedings of the IEEE, vol. 78 (10), 1990.
- [7] Feofiloff P., Kohayakawa Y., Wakabayashi Y., *Uma Introdução Sucinta à Teoria dos Grafos*, IME, 2011.
- [8] Matsunaga, V., *Curso de Redes Neurais utilizando o MATLAB*. Belém do Pará, 2012.
- [9] Karger, D R., *Minimum Cuts in Near-Linear Time*, Journal of the ACM (JACM), 2000.
- [10] Newman, M.E.J., *The Structure and Function of Complex Networks*, SIAM Rev., 45(2), 167–256, 2003.

## A Apêndices

### A.1 Apêndice 1

```

##Programa para identificar padroes
memorizados##
###Funcoes###
def hop(letra):
    from numpy import array
    #replace: substitui na string \n por
    vazio
    letra= letra.replace('\n','')
    return array([+1 if i=='0' else -1 for
        i in letra])

def treina(letras):
    # Algoritmo de treinamento da rede
    from numpy import zeros, outer,
        diag_indices
    r,c = letras.shape
    W = zeros((c,c))
    for p in letras:
        W = W + outer(p,p)
    W[diag_indices(c)] = 0
    return W/r

def plota(img):
    from matplotlib import pyplot as plt
    #reshape: transforma em matriz 5x5
    img=img.reshape(5,5)
    plt.imshow(img,cm.binary,interpolation='nearest')
    plt.show()

def recall(W, V, steps):
    from numpy import vectorize, dot
    sgn = vectorize(lambda x: -1 if x<0
        else +1)
    display(V)

```



```

        a=0
        print 'Serial',V
        drawhopfield(W,V)
        A = sgn(dot(V,W)-T)
        V[a]=A[a]
        a=a+1
    return V
#####
#recall: modo de operacao completamente
#paralelo
def recall(W, V, T, steps):
    from numpy import vectorize, dot
    sgn = vectorize(lambda x: -1 if x<0
                    else +1)
    for _ in xrange(steps):
        V = sgn(dot(V,W)-T)
        print 'paralelo',V
        drawhopfield(W,V)
    return V
#####

###Programa Principal Rede Erdos-Renyi###
import networkx as nx
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

#Gera rede complexa de Erdos-renyi
n=10 # numero de nos
G=nx.erdos_renyi_graph(n,0.8)
W=nx.to_numpy_matrix(G)
W=np.array(W)
V=np.ones(n)
nx.draw(G),plt.show()

#Gera vetor inicial randomico
import random as rd
V=np.ones(n)
i=0
for a in V:
    a=rd.randint(0,1)

```

```

        if a==0:
            a=-1
            V[i]=a
            i=i+1
    print V # mostra o vetor inicial
#Rede de Erdos-Renyi em modo serial
recallSERIAL(W, V, 0, 100)
#Rede de Erdos-Renyi em modo completamente
#paralelo
recall(W, V, 0, 10)

###Programa Principal Rede Barabasi###
import networkx as nx
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
#Gera rede complexa de Barabasi
n=7 # numero de nos
G=nx.barabasi_albert_graph(n,3)
W=nx.to_numpy_matrix(G)
W=np.array(W)
V=np.ones(n)
nx.draw(G),plt.show()

#Gera vetor inicial randomico
import random as rd
V=np.ones(n)
i=0
for a in V:
    a=rd.randint(0,1)
    if a==0:
        a=-1
        V[i]=a
        i=i+1
    print V # mostra o vetor inicial
#Rede de Barabasi em modo serial
recallSERIAL(W, V, 0, 100)
#Rede de Barabasi em modo completamente
#paralelo
recall(W, V, 0, 10)

```

---